min max regret 最適化問題に関する研究の紹介

橋本英樹 (東京海洋大学)

発表内容

- Aissi, H., Bazgan, C., & Vanderpooten, D. (2009). Min–max and min–max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey. *European journal of operational research*, *197*(2), 427-438.
- Min-max regret 多次元ナップサック問題

古典的な組合せ最適化問題

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=0}^{n} c_i x_i$$

$$\text{subject to} \quad x \in X \subset \{0,1\}^n$$

- 多項式時間で解ける問題
  - 最短路問題，最小全域木問題，．．．
- NP困難な問題
  - ナップサック問題，集合被覆問題，．．．

Discrete scenarioとinterval scenario

- シナリオ集合S

$$c^s = (c_1^s, c_2^s, \ldots, c_n^s), \quad s \in S$$

- Discrete scenarioケース
  - $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$

- Interval scenarioケース
  - c_iが $[\underline{c_i}, \overline{c_i}]$ の任意の値をとる．ただし

$$0 \leq \underline{c_i} \leq \overline{c_i}$$

Min max 問題

- 解xとシナリオsに対する評価値

$$\mathrm{val}(x, s) = \sum_{i=1}^{n} c_i^s x_i$$

- シナリオsのときの最適値

$$\mathrm{val}_s^* = \mathrm{val}(x_s^*, s)$$

- **(**すべてのシナリオを考慮した最悪の評価値**)**を最小化 $\displaystyle \min_{x \in X} \max_{s \in S} \mathrm{val}(x, s)$

Min max regret 問題

- 解xとシナリオsに対するregret

$$R(x, s) = \mathrm{val}(x, s) - \mathrm{val}_s^*$$

- 解xに対する最大regret

$$R_{\max}(x) = \max_{s \in S} R(x, s)$$

- **Min-max regretを求める問題P**

$$\min_{x \in X} R_{\max}(x) = \min_{x \in X} \max_{s \in S} \mathrm{val}(x, s) - \mathrm{val}_s^*$$

問題のバリエーション

- Discrete scenario

$$(c_1^s, c_2^s, \ldots, c_n^s), \quad s \in S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$$

- Interval scenario

$$c_i^s, \quad c_i^s \in [\underline{c_i}, \overline{c_i}]$$

- Min-max

$$\min_{x \in X} \max_{s \in S} \mathrm{val}(x, s)$$

- Min-max regret

$$\min_{x \in X} R_{\max}(x) = \min_{x \in X} \max_{s \in S} \mathrm{val}(x, s) - \mathrm{val}_s^*$$

Interval min-max Pは，
$c_i = \overline{c_i}$としたPと同じ

例： ナップサック問題

- a capital budgeting problem with uncertainty or imprecision on the expected profits.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

例：入力データ

Discrete scenario

Interval scenario

Table 1
Cash outflows and profits of the investments

i	w_i	p_i^1	p_i^2	p_i^3	$\underline{p}_i$	$\bar{p}_i$
1	3	4	3	3	3	5
2	5	8	4	6	2	6
3	2	5	3	3	2	5
4	4	3	2	4	2	3
5	5	2	8	2	3	9
6	3	4	6	2	1	7

b=12

例：discrete scenario

Table 2

Optimal values and solutions (discrete scenario case)

1	2	3	Optimal solution
17	10	12	Scenario 1: (1,1,1,0,0,0)
11	17	7	Scenario 2: (0,0,1,0,1,1)
16	9	13	Scenario 3: (0,1,1,1,0,0)
15	12	12	Max–min: (0,1,0,1,0,1)
15	15	11	Min–max regret: (0,1,1,0,1,0)

計算複雜度

	Discrete(const.)	Discrete(const.)	Discrete(non const.)	Discrete(non const.)	Interval
	Min-max	Min-max regret	Min-max	Min-max regret	Min-max regret
shortest path	NP-hard, pseudo-poly	NP-hard, pseudo-poly	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard
Spanning tree	NP-hard, pseudo-poly	NP-hard, pseudo-poly	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard
assignment	NP-hard	NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard
knapsack	NP-hard, pseudo-poly	NP-hard, pseudo-poly	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	NP-hard
Min cut	Poly	Poly	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Poly
Min s-t cut	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard	Strongly NP-hard

定理 (Kouvelis and Yu, 1997)

Discrete min-max regret Pの**問題例*I*に対して,**

$$c'_i = \sum_{s=1}^{k} \frac{c_i^s}{k}$$

としたPの問題例I'を考える. *I'*の最適解*x'*は

$$\max_{s \in S}(\mathrm{val}(x', s) - \mathrm{val}_s^*) \leq k \cdot \mathrm{opt}(I)$$

を満たす.

（discrete min-max Pについても同様のことが示せる）

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{s \in S} \frac{1}{k} (\mathrm{val}(x', s) - \mathrm{val}^*_s) \\
&= \min_{x \in X} \frac{1}{k} \sum_{s \in S} (\mathrm{val}(x, s) - \mathrm{val}^*_s) \\
&\leq \min_{x \in X} \frac{1}{k} k \max_{s \in S} (\mathrm{val}(x, s) - \mathrm{val}^*_s) \\
&= \mathrm{opt}(I)
\end{aligned}
$$

$$
U = \max_{s \in S} (\mathrm{val}(x', s) - \mathrm{val}^*_s)
$$

$$
\begin{aligned}
U &\leq \sum_{s \in S} (\mathrm{val}(x', s) - \mathrm{val}^*_s) \\
&= kL \\
&\leq k \cdot \mathrm{opt}(I)
\end{aligned}
$$

定理

Discrete min-max Pの問題例*I*に対して,

$$c'_i = \max_{s \in S} c_i^s$$

としたPの問題例I'を考える. *I'*の最適解*x'*は

$$\max_{s \in S} \mathrm{val}(x', s) \leq k \cdot \mathrm{opt}(I)$$

を満たす.

$$
\begin{aligned}
\max_{s\in S}\sum_{i=1}^{n} c_i^s x_i' &\le \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i' \le \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i^* \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{s\in S} c_i^s x_i^* = \sum_{s\in S}\sum_{i=1}^{n} c_i^s x_i^* \\
&\le k\cdot \max_{s\in S}\sum_{i=1}^{n} c_i^s x_i^* = k\cdot \mathrm{opt}(I)
\end{aligned}
$$

（x^*はDiscrete min-max Pの最適解）

定理(Yaman et al. 2001)

Interval min-max regret Pにおいて，解*x*のregretは次の最悪シナリオ　$c^-(x)$
のときに最大になる.

$$c^-(x) = \begin{cases} \overline{c_i} & \text{if } x_i = 1 \\ \underline{c_i} & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

$$(I(x) = \{i \mid x_i = 1\})$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}(x, s) - \mathrm{val}(x_s^*, s) \\
&= \sum_{i \in I(x) \setminus I(x_s^*)} c_i^s - \sum_{i \in I(x_s^*) \setminus I(x)} c_i^s \\
&\leq \sum_{i \in I(x) \setminus I(x_s^*)} \overline{c_i} - \sum_{i \in I(x_s^*) \setminus I(x)} \underline{c_i} \\
&= \mathrm{val}(x, c^-(x)) - \mathrm{val}(x_s^*, c^-(x)) \\
&\leq \mathrm{val}(x, c^-(x)) - \mathrm{val}(x_{c^-(x)}^*, c^-(x))
\end{aligned}$$

定理

Interval min-max regret Pの最適解*x**は次のシナリオ　$c^+(x^*)$　のPの最適解になる.

$$c^+(x^*) = \begin{cases} \underline{c_i} & \text{if } x_i^* = 1 \\ \overline{c_i} & \text{if } x_i^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(x^*, s) - \mathrm{val}(x^*_{c^+(x^*)}, s) &= \sum_{i \in I(x^*) \setminus I(x^*_{c^+(x^*)})} c_i^s - \sum_{i \in I(x^*_{c^+(x^*)}) \setminus I(x^*)} c_i^s \\
&\geq \sum_{i \in I(x^*) \setminus I(x^*_{c^+(x^*)})} \underline{c_i} - \sum_{i \in I(x^*_{c^+(x^*)}) \setminus I(x^*)} \overline{c_i} \\
&= \mathrm{val}(x^*, c^+(x^*)) - \mathrm{val}(x^*_{c^+(x^*)}, c^+(x^*))
\end{aligned}$$

x^*が$c^+(x^*)$シナリオのPの最適解でないと仮定する.

$$\mathrm{val}(x^*, s) - \mathrm{val}(x^*_{c^+(x^*)}, s) > 0$$

$$\mathrm{val}(x^*, s) - \mathrm{val}^*_s > \mathrm{val}(x^*_{c^+(x^*)}, s) - \mathrm{val}^*_s$$

$$\max_{s \in S}\{\mathrm{val}(x^*, s) - \mathrm{val}^*_s\} > \max_{s \in S}\{\mathrm{val}(x^*_{c^+(x^*)}, s) - \mathrm{val}^*_s\}$$

x^*がInterval min-max regret Pの最適解であることに矛盾

定理 (Kasperski and Zielinski,2006)

Interval min-max regret Pの問題例*I*に対して,

$$c_i' = \frac{1}{2}(\underline{c_i} + \overline{c_i})$$

としたPの問題例*I'*を考える. *I'*の最適解*x'*は

$$\max_{s \in S}(\mathrm{val}(x', s) - \mathrm{val}_s^*) \leq 2 \cdot \mathrm{opt}(I)$$

を満たす.

Tight example

どの枝を選んでもPの最適解
- e1を選択すると，regret=1-0
- e2を選択すると，regret=2-0

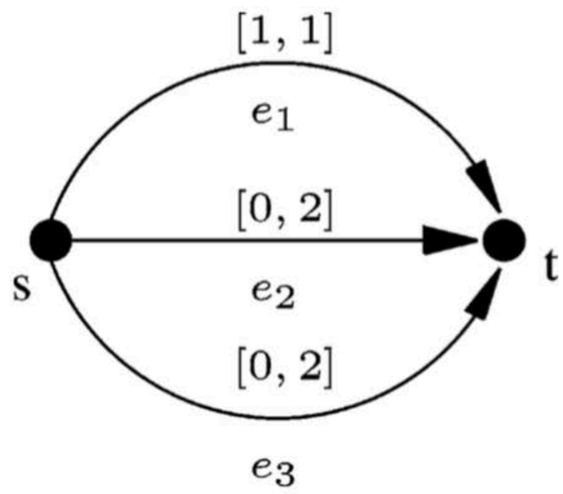


Fig. 1. An example of the robust shortest path problem for which Algorithm AM achieves a ratio of 2.

Algorithms for the Min-Max Regret Multidimensional Knapsack Problem

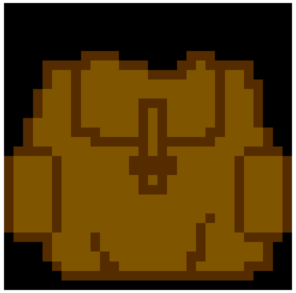
多次元ナップサック問題(MKP)

n: アイテム数　　c_j: アイテムjの利得
$x_j \in \{0,1\}$: アイテムjを選択しているか否か
$x_j = 1$:アイテムjを選択する
$x_j = 0$:アイテムjを選択しない
a_{ij}: i番目の制約におけるアイテムjの重み
b_i: i番目の制約におけるアイテムの重みの総和の許容量

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, 2, \dots, m \leftarrow ① \\
 & x_j \in \{0, 1\} & j = 1, 2, \dots, n \leftarrow ②
\end{array}
$$

X: ①かつ②を満たしている解xの集合

item	1	2	3
c_j	8	16	30
a_{1j}	5	12	20
a_{2j}	100	200	300



$b_1 = 25$
$b_2 = 300$

$x = \{1,0,1\}\{0,1,1\}\{1,1,1\}$ ⇒ 実行不可能解
$x = \{0,0,0\},\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\},\{1,1,0\}$ ⇒ 実行可能解
最適解(利得の総和が最大になるようなアイテムの選び方)は$\{0,0,1\}$

Min-Max Regret 多次元ナップサック問題 (MMR-MKP)

regretについて

$$S = (c_1^S, c_2^S, \dots, c_n^S)$$ ← シナリオ

任意の$j = 1, 2, \dots, n$について

$$c_j^- \leq c_j^S \leq c_j^+$$

$$F(S, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^S x_j$$

$$F^*(S) = \max_{x \in X} F(S, x)$$

$$R(S, x) = F^*(S) - F(S, x)$$

あるシナリオSにおける, 実行可能解xに対するregret

Min-Max Regret 多次元ナップサック問題 (MMR-MKP)

Aをシナリオの集合とすると

$$\begin{aligned} Z(x) &= \max_{S \in A} R(S, x) \\ &= \max_{S \in A}(F^*(S) - F(S, x)) \end{aligned}$$

$Z(x)$の値が最小になるような$x \in X$を見つける問題

→ Min-max regret 多次元ナップサック問題 (MMR-MKP)

※ $X = \{x \in \{0,1\}^n | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m\}$

シナリオ固定アルゴリズム

$$R(S,x) = F^*(S) - F(S,x) = \max_{y \in X} \sum_{j=1}^{n} c_j^S y_j - \sum_{j=1}^{n} c_j^S x_j$$

に対して、 Sを固定することで１変数の最大化問題として解くことができる

中間シナリオ$\tilde{s}$・・・各アイテムjについて、利得が
$(c_j^+ + c_j^-)/2$となるようなシナリオ

Lemma

中間シナリオ$\tilde{s}$のもとでの$R(\tilde{s},x)$の最適値は、MMR-MKPの最適値の2倍以内である

最悪シナリオのついてのLemma

最悪シナリオ：$S'(x)$

→ ある解xに対して，regret$R(S,x)$を最大にするようなシナリオ

最悪シナリオについてのLemma

任意の$x \in X$について,

$x_j = 0$ ならば　$c_j^{S'(x)} = c_j^{+}$,

$x_j = 1$ ならば　$c_j^{S'(x)} = c_j^{-}$

となるようなシナリオが最悪シナリオとなる.

MMR-MKPの定式化

・定式化

シナリオの集合をAとすると、MMR-MKPの定式化は以下

MMR-MKP: $\min_{x \in X} \max_{S \in A} R(S, x)$

$= \min_{x \in X} \max_{S \in A} [F^*(S) - F(S, x)]$

実行可能解xに対する最悪シナリオを$S'(x)$とすると

MMR-MKP: $\min_{x \in X} [F^*\left(S'(x)\right) - F(S'(x), x)] \quad =$
$\min_{x \in X} [\max_{y \in X} \sum_{j=1}^{n} c_j^{S'(x)} y_j - \sum_{j=1}^{n} c_j^{S'(x)} x_j]$

$= \min_{x \in X} \left[\max_{y \in X} \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^+ + c_j^- x_j - c_j^+ x_j\right) y_j - \sum_{j=1}^{n} c_j^- x_j\right]$

※ $X = \{x \in \{0,1\}^n | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i = 1, 2, \dots, m\}$

双対定理

一般の線形計画問題に対して

主問題

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\mathrm{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\
& 0 \leq x_j \leq 1 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

双対問題

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j & \\
\mathrm{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i + v_j \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\
& u_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\
& v_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

双対定理

主問題と双対問題の両方が実行可能解を持つならば, そのどちらもが最適解を持ち, 双方の最適値は一致する.

双対定理を利用したMMR-MKPの変形

$$\min_{x \in X}\left[\max_{y \in X} \sum_{j=1}^{n} (c_j^+ + c_j^- x_j - c_j^+ x_j) y_j - \sum_{j=1}^{n} c_j^- x_j\right]$$

$0 \leq y \leq 1$に緩和し、
双対定理を利用

最小化問題への統合

$$\begin{aligned}
\min \quad & \left[\textstyle\sum_{i=1}^{m} b_i u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j - \sum_{j=1}^{n} c_j^- x_j\right] & \\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i + v_j \geq c_j^+ + c_j^- x_j - c_j^+ x_j & j = 1, 2, \dots, n \\
& u_i \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \\
& v_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\
& x_j \in \{0, 1\} & j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

計算結果

- 実験環境は, Intel(R) Core(TM) i5-2430M CPU @ 2.40GHz
- 問題例については, 既存の多次元ナップサック問題の問題例を利用.
- c_j^+はc_j〜$(c_j+\delta)$, $\delta \in \{0.05, 0.1, 0.15\}$の中からランダムに
  c_j^-は$(c_j-\delta)$〜c_j, $\delta \in \{0.05, 0.1, 0.15\}$の中からランダムに決定
- $n = 100,\ m = 5,\ b_i = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$
- 相対誤差(双対)：(目的関数値(双対)−最適目的関数値)/最適目的関数値,
  相対誤差(中間)：(目的関数値(中間)−最適目的関数値)/最適目的関数値

α	δ	Time[s] (双対)	Time[s] (中間)	Time[s] (最適)	目的関数値(双対)	目的関数値(中間)	最適値	相対誤差 (双対)	相対誤差 (中間)
0.25	0.05	6.19	2.74	74.38	194.83	258.1	194.83	0	0.32
0.5	0.05	1.31	1.35	47.72	148.89	148.89	148.89	0	0
0.75	0.05	1.68	0.68	9.12	146.74	169.18	121.68	0.20	0.39
0.25	0.10	15.92	10.45	555.56	474.18	492.16	474.18	0	0.03
0.5	0.10	5.35	2.55	230.60	450.3	534.46	450.3	0	0.18
0.75	0.10	0.96	0.67	42.79	288.78	290.62	246.63	0.170	0.178
0.25	0.15	18.79	18.34	3005.59	888.51	888.51	879.26	0.0001	0.0001
0.5	0.15	7.03	4.96	1427.41	690.39	737.88	688.2	0.003	0.072
0.75	0.15	1.27	0.53	361.64	539.33	539.33	518.2	0.04	0.04

まとめ

- 問題のバリエーション
  - discrete min-max P: *k*近似
  - discrete min-ma regret P: *k*近似
  - (interval min-max P)
  - interval min-max regret P: 2近似
- interval min-max regret 多次元ナップサック問題
  - 2近似
  - 双対定理を利用した手法