サプライ・チェイン・リスク管理のための不確実性を考慮した最適化モデル

田中未来

東京理科大学

2015 年 5 月 20 日
Supply Chain Risk Management フォーラム 第 8 回セミナー
東京海洋大学

自己紹介

- 名前: 田中未来
- 現職: 東京理科大学 理工学部 経営工学科 助教
- 得意技: 最適化問題の定式化, 最適化アルゴリズムの設計
- 師匠: 中田和秀先生, 水野眞治先生 (東工大 社会理工 経営工学)
- 連絡先: `mirai@rs.tus.ac.jp` (共同研究など, もしあれば)

よろしくおねがいします!

内容はざっくり言えば

- 久保幹雄, 小林和博, 武田朗子, 田中未来, 村松正和:
  サプライ・チェイン最適化における 2 次錐最適化の応用,
  オペレーションズ・リサーチ **59** (2014) 739–747.
- S. A. Tarim and B. G. Kingsman:
  The stochastic dynamic production/inventory lot-sizing problem with service-level constraints,
  International Journal of Production Economics **88** (2004) 105–119.
- S. Küçükyavuz:
  Mixed-integer optimization approaches for deterministic and stochastic inventory management,
  in *INFORMS TutORials in Operations Research Vol. 8*, J. Geunes (ed.), INFORMS, pp. 90–105, 2011.
- D. Bertsimas and A. Georghiou:
  Design of near optimal decision rules in multistage adaptive mixed-integer optimization,
  Operations Research, Articles in Advance, 2015.

目次

ロットサイズ決定モデルとは

多期間にわたる工場での生産スケジューリング

$$\text{トレードオフ} \begin{cases} \text{生産費用} = \text{段取り費} + \text{変動費} = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ f + cx & (x > 0) \end{cases} \\ \text{在庫費用} = \text{変動費} = hI \end{cases}$$

需要量 d, 各費用 f, c, h: 定常 ➪ 経済発注量モデル (EOQ 公式) ➪ 現実的でない

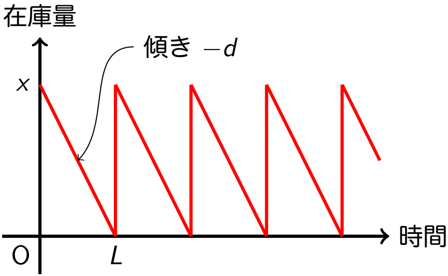
ここでの設定

- 需要量および各費用は期によって変動
- 単純化のため, 単一段階・単一品目

まずは古典から...

経済発注量モデル [Harris 1913]

需要量 d, 各費用 f, c, h: 定常 ⇨ 最適生産方策: 定常 & 在庫ゼロ生産



1 周期あたりの費用

$$f + cx + h\frac{Lx}{2} = f + cdL + \frac{hdL^2}{2}$$

単位時間あたりの費用

$$\frac{f}{L} + cd + \frac{hdL}{2}$$

最も経済的な生産の間隔 L^* と生産量 x^*

$$L^* = \mathrm{argmin}\left\{\frac{f}{L} + \frac{hdL}{2} : L \geq 0\right\} = \sqrt{\frac{2f}{hd}} \qquad x^* = dL^* = \sqrt{\frac{2fd}{h}}$$

いわゆる便利な EOQ 公式 but 現実的でない

Wagner–Whitin のモデル [Wagner–Whitin 1959]

定数

- f_t, c_t, h_t: 期 $t \in \mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$ における段取り費用, 生産費用, 在庫費用
- d_t: 期 t における需要量
- M_t, C_t: 期 t における生産量の上限, 在庫量の上限

変数

- x_t, I_t: 期 t における生産量, 期末の在庫量
- y_t: 期 t において生産をするとき 1, そうでないとき 0

$$
\left|\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) & \\
\text{制約条件} & I_0 = 0 & \\
 & I_t = I_{t-1} + x_t - d_t & (t \in \mathcal{T}) \\
 & 0 \leq I_t \leq C_t & (t \in \mathcal{T}) \\
 & 0 \leq x_t \leq M_t y_t & (t \in \mathcal{T}) \\
 & y_t \in \{0, 1\} & (t \in \mathcal{T})
\end{array}\right.
$$

注: 通常 Wagner–Whitin のモデルというと, 制約 $I_t \leq C_t$ は考えないことが多い

需要の不確実性

定数

- f_t, c_t, h_t: 期 $t \in \mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ における段取り費用, 生産費用, 在庫費用
- d_t: 期 t における需要量の予測値
- M_t, C_t: 期 t における生産量の上限, 在庫量の上限

問題点

- 需要の予測は難しい
- 最適解では需要量の予測値に対して必要最低限の量しか生産しない

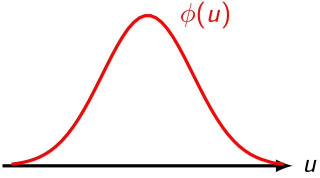
⇨ 予測値よりも多くの需要があったら欠品 (or 工場の従業員が残業, *etc.*)

⇨ 在庫を余分に持つ

よくある方法: 安全在庫

需要量 d が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, 欠品する確率を $1 - p$ 以下にしたい

$$1 - p \geq \Pr(x < d) = \Pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{d-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \int_{(x-\mu)/\sigma}^{\infty} \phi(u)\mathrm{d}u = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



したがって

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \Phi^{-1}(p) \iff x \geq \mu \underbrace{+ \Phi^{-1}(p)\sigma}_{\text{安全在庫}}$$

以下では各期の需要量がそれぞれ独立に正規分布 $\mathrm{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$ に従うと仮定

安全在庫先・ロットサイズ後法 (1 / 2)

平均的な生産間隔 (経済発注量モデル, EOQ 公式)

$$\bar{L} = \operatorname{argmin}\left\{\frac{\bar{f}}{L} + \frac{\bar{h}\bar{\mu}L}{2} : L \in \mathbb{R}_+\right\} = \sqrt{\frac{2\bar{f}}{\bar{h}\bar{\mu}}}$$

平均的に必要な安全在庫

$$SS_{\text{ave}} = z\sqrt{\bar{L}\bar{\sigma}^2} \qquad z = \Phi^{-1}(p)$$

各期における在庫量 I_t の下限制約を SS_{ave} 以上であるという制約で置換

$$\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) \\
\text{制約条件} & I_0 = 0 \\
& I_t = I_{t-1} + x_t - \mu_t \quad (t \in \mathcal{T}) \\
& \cancel{0} \le I_t \le C_t \quad (t \in \mathcal{T}) \\
& \downarrow \\
& SS_{\text{ave}} \\
& 0 \le x_t \le M_t y_t \quad (t \in \mathcal{T}) \\
& y_t \in \{0, 1\} \quad (t \in \mathcal{T})
\end{array}$$

安全在庫先・ロットサイズ後法 (2 / 2)

生産間隔が平均的な生産間隔より長い場合，安全在庫量が不足 ➪ 制約を追加

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) & \\
\text{制約条件} & I_0 = 0 & \\
& I_t = I_{t-1} + x_t - \mu_t & (t \in \mathcal{T}) \\
& \underset{\displaystyle SS_{\text{ave}}}{\overset{\cancel{0}}{\downarrow}} \le I_t \le C_t & (t \in \mathcal{T}) \\
& 0 \le x_t \le M_t y_t & (t \in \mathcal{T}) \\
& y_t \in \{0,1\} & (t \in \mathcal{T}) \\
& \displaystyle\sum_{s=0}^{\bar{L}-1} y_{t+s} \ge 1 & (t \in \mathcal{T} : t \le T - \bar{L} + 1)
\end{array}
$$

例: $\bar{L} = 4$ のとき

$$(y_t) = (1,0,0,0,\underbrace{1,\overbrace{0,0,0,0}^{\text{制約違反}}}_{\bar{L}\text{ より長い}},1,0,0,0) : \text{実行不能}$$

ロットサイズ先・安全在庫後法

ロットサイズの決定

- Wagner-Whitin のモデルを解き, 最適解を $(x_t^*, y_t^*, I_t^* : t \in \mathcal{T})$ とする
- $y_t^* = 1$ となっている t を $t_1 < \cdots < t_k$ とし, 便宜上 $t_{k+1} = T + 1$ とする

安全在庫の決定

- 期 t_i の生産で期 $t = t_i, t_i + 1, \ldots, t_{i+1} - 1$ の需要をまかなう必要
- この間の総需要の標準偏差は $\sqrt{\sum_{s=t_i}^{t_{i+1}-1} \sigma_s^2}$

➩ この間 $SS_t = z\sqrt{\sum_{s=t_i}^{t_{i+1}-1} \sigma_s^2}$ の安全在庫量を追加で保持

➩ 期 t における生産量と在庫量は $x_t = x_t^* + SS_t - SS_{t-1}$, $I_t = I_t^* + SS_t$

ロットサイズ在庫と安全在庫を同時に最適化

新たな変数を導入

$$X_{st} = \begin{cases} 1 & (\text{期 } s \text{ の生産で期 } t \text{ の需要をまかなう}) \\ 0 & (\text{そうでない}) \end{cases} \qquad (s, t \in \mathcal{T} : s \leq t)$$

期 s の生産でまかなう需要量の総和の標準偏差

$$\sqrt{\sum_{t=s}^{T} \sigma_t^2 X_{st}} = \sqrt{\sum_{t=s}^{T} \sigma_t^2 X_{st}^2}$$

生産を行なう期 s において安全在庫のために追加で生産する量

$$SS_s = z\sqrt{\sum_{t=s}^{T} \sigma_t^2 X_{st}^2}$$

安全在庫を考慮したロットサイズ決定モデル

最小化 $\displaystyle \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$

制約条件

$$
\begin{aligned}
& I_0 = 0 \\
& I_t = I_{t-1} + x_t - \mu_t && (t \in \mathcal{T}) \\
& 0 \leq I_t \leq C_t && (t \in \mathcal{T}) \\
& 0 \leq x_t \leq M_t y_t && (t \in \mathcal{T}) \\
& y_t \in \{0, 1\} && (t \in \mathcal{T}) \\
& 0 \leq SS_t \leq C_t y_t && (t \in \mathcal{T}) \\
& SS_s \geq z \sqrt{\sum_{t=s}^{T} \sigma_t^2 X_{st}^2} && (s \in \mathcal{T}) \\
& I_s \geq \sum_{t=s+1}^{T} \mu_t X_{st} + SS_s && (s \in \mathcal{T}) \\
& X_{st} = \begin{cases} 1 & (\text{期 } s \text{ の生産で期 } t \text{ の需要をまかなう}) \\ 0 & (\text{そうでない}) \end{cases} && (s, t \in \mathcal{T} : s \leq t)
\end{aligned}
$$

X_{st} を表現するための制約

制約条件

$$\begin{cases} X_{st} \le y_s & (s, t \in \mathcal{T} : s \le t) \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{t} X_{st} = \begin{cases} 1 & (\mu_t > 0) \\ 0 & (\mu_t = 0) \end{cases} & (t \in \mathcal{T}) \\ X_{su} \le X_{st} & (t \in \mathcal{T} : s < t < u) \\ X_{st} \in \{0, 1\} & (t \in \mathcal{T} : s \le t) \end{cases}$$

実行可能解の例

$$(y_s) = \begin{array}{c} s \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (X_{st}) = \begin{array}{c|ccccc} s \backslash t & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & & & 1 & 1 & 1 \\ 4 & & & & 0 & 0 \\ 5 & & & & & 0 \end{array}$$

安全在庫を考慮したロットサイズ決定モデル

最小化 $\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$

制約条件

$$
\begin{array}{ll}
I_0 = 0 & \\
I_t = I_{t-1} + x_t - \mu_t & (t \in \mathcal{T}) \\
0 \leq I_t \leq C_t & (t \in \mathcal{T}) \\
0 \leq x_t \leq M_t y_t & (t \in \mathcal{T}) \\
y_t \in \{0, 1\} & (t \in \mathcal{T}) \\
0 \leq SS_t \leq C_t y_t & (t \in \mathcal{T}) \\
SS_s \geq z \sqrt{\sum_{t=s}^{T} \sigma_t^2 X_{st}^2} & (s \in \mathcal{T}) \\
I_s \geq \sum_{t=s+1}^{T} \mu_t X_{st} + SS_s & (s \in \mathcal{T}) \\
X_{st} \leq y_s & (s, t \in \mathcal{T} : s \leq t) \\
\sum_{s=1}^{t} X_{st} = \begin{cases} 1 & (\mu_t > 0) \\ 0 & (\mu_t = 0) \end{cases} & (t \in \mathcal{T}) \\
X_{su} \leq X_{st} & (t \in \mathcal{T} : s < t < u) \\
X_{st} \in \{0, 1\} & (t \in \mathcal{T} : s \leq t)
\end{array}
$$

混合整数 2 次錐最適化問題

安全在庫量の下限制約は 2 次錐制約

$$SS_s \geq z\sqrt{\sum_{t=s}^{T} \sigma_t^2 X_{st}^2}$$

d 次元の 2 次錐

$$\mathcal{Q}^d = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d : x_0 \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} \bar{x}_i^2} \right\} = \{(x_0, \bar{\boldsymbol{x}})^\top \in \mathbb{R}^d : x_0 \geq \|\bar{\boldsymbol{x}}\|\}$$

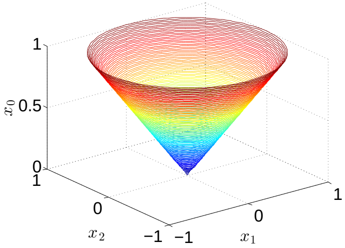


Figure : $d = 3$ の場合: 円錐

2 次錐最適化問題 (SOCP): 内点法で多項式時間で解ける

$$\begin{array}{|ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{Q}^{n_1} \times \cdots \times \mathcal{Q}^{n_K} \end{array}$$

混合整数 2 次錐最適化問題 (MISOCP): Gurobi, CPLEX, SCIP などで手軽に解ける

計算実験: 目的・方法

目的: ロットサイズと安全在庫を同時に決める嬉しさを見る

方法: 以下の 3 つの方法を比較

- 安全在庫先・ロットサイズ後法
- ロットサイズ先・安全在庫後法
- 安全在庫を考慮したロットサイズ決定モデル

パラメータ

- $T = 30, \ldots, 50$
- $f_t = 100 \times \texttt{random.randint}(1, 10)$ (期によって異なる)
- $\mu_t = 100 + \texttt{random.randint}(-25, 25)$ (期によって異なる)
- $\sigma_t = 5$ (期によらず一定)
- $c_t = h_t = 1$ (期によらず一定)
- $C_t = M_t = \dfrac{\theta}{T} \sum_{t \in \mathcal{T}} \mu_t$ (期によらず一定, $\theta = 2.0, \ldots, 5.0$)
- $z = 1.65$ (欠品率を 5% に抑える)

計算環境: ふつうのノートパソコン + CPLEX

安全在庫先・ロットサイズ後法との比較

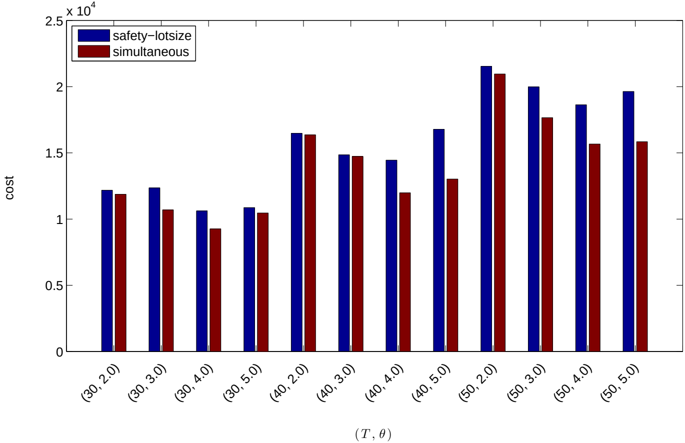


Figure : 総費用

ロットサイズ先・安全在庫後法との比較

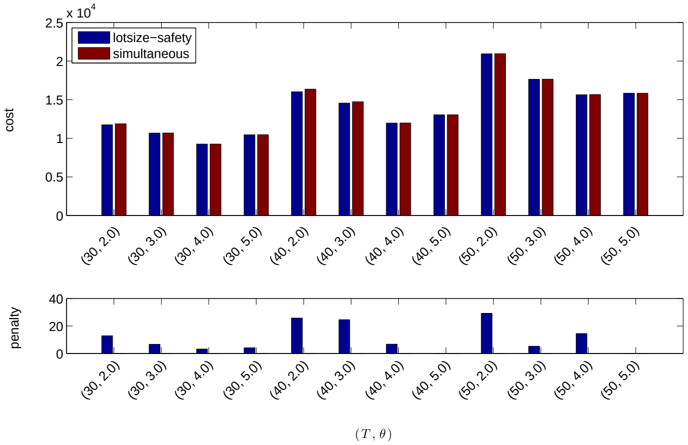


Figure : 上段: 総費用, 下段: 制約違反度

正規分布の仮定を外す

実は…

- 2 次錐制約を使わなくても定式化できる
- 正規分布でなくてもよい

以下での仮定: 連続する複数の期にわたる需要量の和の分布関数の逆関数が既知

$$F^{-1}_{\sum_{u=s}^{t} d_u}(p)$$

期 t で欠品する確率を $1-p$ 以下とするモデル

$$
\left|
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) & \\
\text{制約条件} & I_0 = 0 & \\
 & I_t = I_{t-1} + x_t - d_t & (t \in \mathcal{T}) \\
 & 0 \le I_t & (t \in \mathcal{T}) \\
 & 0 \le x_t \le M_t y_t & (t \in \mathcal{T}) \\
 & y_t \in \{0,1\} & (t \in \mathcal{T}) \\
 & \Pr(I_t \ge 0) \ge p & (t \in \mathcal{T})
\end{array}
\right.
$$

確率制約を書き換える

期 t の直前に生産を行なう期を s とする

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & \cdots & s-1 & s & s+1 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & T \\ (y_s) = & (\, * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \,) \end{array}$$

期 s の期末の在庫が重要

$$I_t \geq 0 \iff I_s \geq \sum_{u=s}^{t} d_u$$

この確率が p 以上という制約は次のように書ける

$$I_s \geq F^{-1}_{\sum_{u=s}^{t} d_u}(p) \iff I_t \geq F^{-1}_{\sum_{u=s}^{t} d_u}(p) + \sum_{u=s}^{t} d_u$$

y_t を用いて直前に生産を行なう期を表現

次のような 0–1 整数変数 z_{ts} を定義

$$z_{ts} = \begin{cases} 1 & (\text{期 } t \text{ の直前に生産を行なう期が } s) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

次のような制約条件で表現できる

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{t} z_{ts} = 1 & (t \in \mathcal{T}) \\ \displaystyle z_{ts} \geq y_s - \sum_{u=s+1}^{t} y_u & (t \in \mathcal{T}; s = 1, \ldots, t) \\ z_{ts} \in \{0, 1\} & (t \in \mathcal{T}; s = 1, \ldots, t) \end{cases}$$

Tarim–Kingsman のモデル [Tarim–Kingsman 2004]

最小化 $\displaystyle \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$

制約条件

$$I_0 = 0$$

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \quad (t \in \mathcal{T})$$

$$0 \le I_t \quad (t \in \mathcal{T})$$

$$0 \le x_t \le M_t y_t \quad (t \in \mathcal{T})$$

$$I_t \ge \sum_{s=1}^{t} \left(F^{-1}_{\sum_{u=s}^{t} d_u}(p) - \sum_{u=s}^{t} d_u \right) z_{tu} \quad (t \in \mathcal{T})$$

$$\sum_{s=1}^{t} z_{ts} = 1 \quad (t \in \mathcal{T})$$

$$z_{ts} \ge y_s - \sum_{u=s+1}^{t} y_u \quad (t \in \mathcal{T}; s = 1, \ldots, t)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad (t \in \mathcal{T})$$

$$z_{ts} \in \{0, 1\} \quad (t \in \mathcal{T}; s = 1, \ldots, t)$$

既知の情報を意思決定に利用 [Goel–Küçükyavuz 2011]

状態を離散化してシナリオベースで不確実性を表現

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{t\in\mathcal{T}} \pi_i(f_{ti}y_{ti} + c_{ti}x_{ti} + h_{ti}I_{ti}) & \\
\text{制約条件} & I_0 = 0 & \\
& \displaystyle I_{ti} \geq \sum_{s=1}^{t}(x_{si} - d_{si}) & (t\in\mathcal{T}; i\in\mathcal{I}) \\
& 0 \leq x_{ti} \leq M_{ti}y_{ti} & (t\in\mathcal{T}; i\in\mathcal{I}) \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{t} x_{si} \geq (1-z_i)\sum_{s=1}^{t} d_{si} & (t\in\mathcal{T}; i\in\mathcal{I}) \\
& \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} x_{si} \geq \sum_{t\in\mathcal{T}} d_{si} & (i\in\mathcal{I}) \\
& x_{ti} = x_{tj} & (t\in\mathcal{T}; i\in\mathcal{I}; j\in\mathcal{S}_{ti}) \\
& \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i z_i \leq 1-p & \\
& y_{ti} \in \{0,1\} & (t\in\mathcal{T}; i\in\mathcal{I}) \\
& z_i \in \{0,1\} & (i\in\mathcal{I})
\end{array}
$$

目次

在庫方策決定モデルとは

多期間にわたる小売店での発注量の決定

$$\text{総費用の最小化}\begin{cases}\text{在庫費用} & (\text{需要} < \text{在庫})\\ \text{バックオーダー費用} & (\text{在庫} < \text{需要})\end{cases}$$

定数

- h_t, b_t: 期 $t \in \mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$ における在庫費用, バックオーダー費用
- d_t: 期 t における需要量
- M_t: 期 t における発注量の上限

変数

- x_t: 期 t の期首における発注量
- y_t: 在庫費用とバックオーダー費用のうち発生する方

$$I_t = \sum_{s=1}^{t}(x_s - d_s) \quad |I_t| = \begin{cases}\text{期 } t \text{ の期末における在庫量} & (I_t > 0)\\ \text{期 } t \text{ の期末におけるバックオーダー量} & (I_t < 0)\end{cases}$$

在庫方策決定モデル: 定式化 [Bertsimas–Thiele, 2004]

$$I_t = \sum_{s=1}^{t}(x_s - d_s) \quad |I_t| = \begin{cases} \text{期 } t \text{ の期末における在庫量} & (I_t > 0) \\ \text{期 } t \text{ の期末におけるバックオーダー量} & (I_t < 0) \end{cases}$$

$$\begin{array}{|lll} \text{最小化} & \sum_{t\in\mathcal{T}} y_t & \\ \text{制約条件} & y_t \geq h_t \sum_{s=1}^{t}(x_s - d_s) & (t \in \mathcal{T}) \\ & y_t \geq b_t \sum_{s=1}^{t}(d_s - x_s) & (t \in \mathcal{T}) \\ & 0 \leq x_t \leq M_t & (t \in \mathcal{T}) \end{array}$$

1 番目と 2 番目の制約の意味

$$y_t \geq \max\left\{ h_t \sum_{s=1}^{t}(x_s - d_s), b_t \sum_{s=1}^{t}(d_s - x_s) \right\}$$

需要量の不確実性?

ロバストモデル [Ben-Tal–Nemirovski 1998]

不確実な需要量ベクトル $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_T)^\top$ がある集合 $\mathcal{U}$ に入ることを想定
すべての $\boldsymbol{d} \in \mathcal{U}$ に対して (最悪の場合でも) 実行可能になるようにする

$$
\left|\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} y_t & \\
\text{制約条件} & \displaystyle y_t \geq \max_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{U}} h_t \sum_{s=1}^{t}(x_s - d_s) & (t \in \mathcal{T}, \cancel{\boldsymbol{d} \in \mathcal{U}}) \\
 & \displaystyle y_t \geq \max_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{U}} b_t \sum_{s=1}^{t}(d_s - x_s) & (t \in \mathcal{T}, \cancel{\boldsymbol{d} \in \mathcal{U}}) \\
 & 0 \leq x_t \leq M_t & (t \in \mathcal{T})
\end{array}\right.
$$

不確実性集合

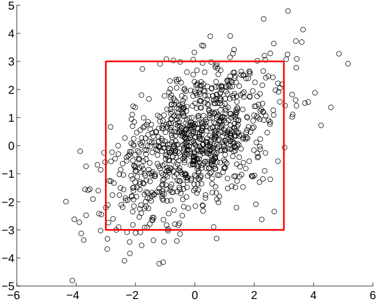


Figure : 超立方体: “悲観的すぎる”

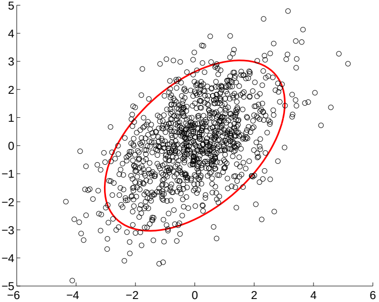


Figure : 楕円体: 多変量正規分布と対応

楕円体型不確実性集合

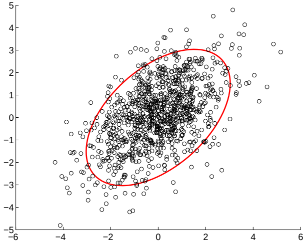
確率変数 $\boldsymbol{x}$ が多変量正規分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従うと仮定
不確実性集合 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \le c\}$ に入る確率を p 以上にしたい

$$p \le \Pr(\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) = \Pr((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \le c) = F_n(c)$$

($F_n(\cdot)$: 自由度 n の χ^2 分布の分布関数)

したがって

$$c \ge F_n^{-1}(p)$$

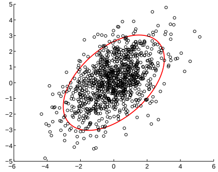


楕円体型不確実性集合の書き換え

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \le c\} \\ &= \{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| \le 1\}\end{aligned}$$

ここで $c\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^\top$ (*e.g.*: Cholesky 分解, 行列の平方根)

楕円体型不確実性集合を用いたときのロバストモデル



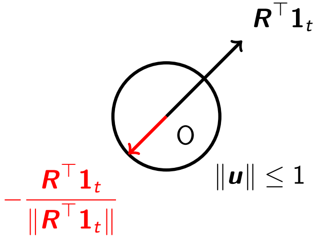
楕円体型の不確実性集合を使う

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| \leq 1\}$$

ロバスト化した制約に出てくる max は陽に解ける

$$\mathbf{1}_t = \begin{array}{ccccccc} 1 & & t & t+1 & & T & \\ (1, & \ldots, & 1, & 0 & , \ldots, & 0 &)^\top \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_t &\geq \max_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{U}} h_t \sum_{s=1}^{t} (x_s - d_s) \\ &= h_t \max_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{U}} \mathbf{1}_t^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}) \\ &= h_t \left(\mathbf{1}_t^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) - \min_{\|\boldsymbol{u}\|\leq 1} (\boldsymbol{R}^\top \mathbf{1}_t)^\top \boldsymbol{u} \right) \\ &= h_t (\mathbf{1}_t^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) + \|\boldsymbol{R}^\top \mathbf{1}_t\|) \end{aligned}$$



(かすかにただよう 2 次錐のかおり...)

楕円体型不確実性集合を用いたときのロバストモデル

結局, 線形最適化問題になる

$$
\left|
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} y_t & \\
\text{制約条件} & y_t \geq h_t(\mathbf{1}_t^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) + \|\boldsymbol{R}^\top \mathbf{1}_t\|) & (t \in \mathcal{T}) \\
& y_t \geq b_t(\mathbf{1}_t^\top(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{R}^\top \mathbf{1}_t\|) & (t \in \mathcal{T}) \\
& 0 \leq x_t \leq M_t & (t \in \mathcal{T})
\end{array}
\right.
$$

適応型ロバストモデル [Ben-Tal–Goryashko–Guslitzer–Nemirovski 2004]

時刻 t での意思決定はすでに明らかになっている過去の情報を利用して行なわれる
➯ x_t は過去の利用可能な情報 $(d_t : t \in \mathcal{I}_t)$ の関数となると考えるのが自然

$\mathcal{I}_t$: 時刻 t において需要量が利用可能であるような過去の時刻の集合

- $\mathcal{I}_t = \{1, \ldots, t-1\}$: 昨日までの需要量の確定値が今日の意思決定に使える
- $\mathcal{I}_t = \{1, \ldots, t-2\}$: 昨日の需要量はまだ集計中で使えない
- $\mathcal{I}_t = \{t-7, \ldots, t-1\}$: 1 週間前の情報は忘れた

解きやすさのため線形性を仮定

$$x_t = \sum_{u \in \mathcal{I}_t} z_{tu} d_u + z_{t0} \quad (t \in \mathcal{T})$$

適応型ロバストモデル

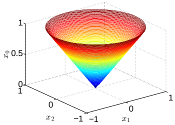
元のモデルに $x_t = \sum_{u \in \mathcal{I}_t} z_{tu} d_u + z_{t0} \ (t \in \mathcal{T})$ を代入

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} y_t & \\
\text{制約条件} & \displaystyle y_t \geq h_t \sum_{s=1}^{t} \left(\left(\sum_{u \in \mathcal{I}_s} z_{su} d_u + z_{s0} \right) - d_s \right) & (t \in \mathcal{T}) \\
& \displaystyle y_t \geq b_t \sum_{s=1}^{t} \left(d_s - \left(\sum_{u \in \mathcal{I}_s} z_{su} d_u + z_{s0} \right) \right) & (t \in \mathcal{T}) \\
& \displaystyle 0 \leq \sum_{u \in \mathcal{I}_t} z_{tu} d_u + z_{t0} \leq M_t & (t \in \mathcal{T})
\end{array}
$$

このモデル自体は元のモデルと変わらない but ロバスト化すると差が生じうる

楕円体型不確実性集合 ➪ 2 次錐最適化問題に帰着できる

$$\|\boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{1}_t\| ➪ \|\boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{z}'_t\|$$



問題例

需要量ベクトル $\boldsymbol{d}$ が従う確率分布: 多変量正規分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\mu_t = \begin{cases} 50 \times 2 & (t \bmod 7 = 5) \\ 50 \times 4 & (t \bmod 7 = 6) \\ 50 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 100 & -50 & & & \\ -50 & 100 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 100 & -50 \\ & & & -50 & 100 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^T$$

他のパラメータ

- $T = 7, 21, 35, 49$
- $p = 0.9$
- $\mathcal{I}_t = \begin{cases} \mathcal{I}_t^{\mathrm{a}} = \{1, \ldots, t-1\} \\ \mathcal{I}_t^{\mathrm{w}} = \{t-7, \ldots, t-1\} \cap \mathcal{T} \end{cases}$
- $h_t = 3, b_t = 100$ (期によらず一定)
- 発注量の上限: $M_t = \dfrac{\gamma}{T} \sum_{t \in \mathcal{T}} \mu_t$ (期によらず一定, $\gamma = 2, 5$)

目的・方法

目的: ロバストモデルや適応型ロバストモデルにした嬉しさを見る

手順

1. $\gamma = 2, 5,\ T = 7, 21, 35, 49$ のそれぞれについて問題例を生成
   - SA 非ロバストモデルで需要量 $\boldsymbol{d}$ を平均値 $\boldsymbol{\mu}$ としたもの
   - SR ロバストモデル
   - ARa 適応型ロバストモデルで $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^{\mathrm{a}}$ としたもの
   - ARw 適応型ロバストモデルで $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^{\mathrm{w}}$ としたもの
2. それぞれの問題例を解いて各期における最適発注量を計算
3. それぞれの問題例に対応する需要量 $\boldsymbol{d} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ を擬似乱数で 10000 個生成
4. 2 で求めた最適発注量を用いたときにかかる総費用を計算

計算環境: ふつうのパソコン $+$ CPLEX

シミュレーション結果

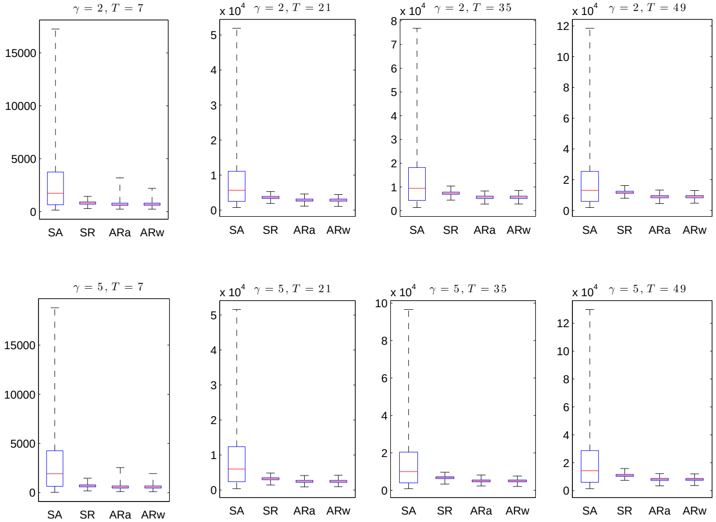


Figure : シミュレーションで得られた総費用の箱ひげ図

1 段階適応型最適化

$$
\left|
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\max_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\xi) & \\
\text{制約条件} & x_i(\cdot) \in \mathcal{R} & (i = 1, \ldots, n) \\
 & y_i(\cdot) \in \mathcal{B} & (i = 1, \ldots, q) \\
 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\xi) \leq \boldsymbol{C}\xi & (\xi \in \Xi)
\end{array}
\right.
$$

表記

- $\mathcal{R} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$: 実数から実数への関数の空間
- $\mathcal{B} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \{0,1\}\}$: 実数から $\{0,1\}$ への関数の空間
- $\Xi := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k : \boldsymbol{W}\xi \geq \boldsymbol{g}, \xi_1 = 1\}$: 不確実性集合 (今回は凸多面体を仮定)

意味

- 多期間にわたる意思決定の場合, 過去に起こった情報は意思決定に利用可能
- 決定変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を確定済みの不確実性ベクトル ξ の関数と考える
- (書かれていないが ξ によらない決定変数もある)

関数空間を制約する

連続変数 $x_i(\cdot) \in \mathcal{R}$: 区分線形連続関数で最適解 [Bemporad–Borre–Morari 2003]

$$\mathcal{PC} := \left\{ x(\cdot) : \begin{array}{c} \exists P \in \mathbb{N}_+, \bar{\boldsymbol{x}}_p, \underline{\boldsymbol{x}}_p \in \mathbb{R}^k \ (p = 1, \ldots, P) \\ \text{s.t. } x(\boldsymbol{\xi}) = \max\limits_{p=1,\ldots,P} \bar{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{\xi} - \max\limits_{p=1,\ldots,P} \underline{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{\xi} \end{array} \right\}$$

0–1 整数変数 $y_i(\cdot) \in \mathcal{B}$: 区分 0–1 関数を使う (最適性は obvious? unclear?)

$$\mathcal{PB} := \left\{ y(\cdot) : \begin{array}{c} \exists P \in \mathbb{N}_+, \bar{\boldsymbol{y}}_p, \underline{\boldsymbol{y}}_p \in \mathbb{R}^k \ (p = 1, \ldots, P) \\ \text{s.t. } y(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max\limits_{p=1,\ldots,P} \bar{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{\xi} - \max\limits_{p=1,\ldots,P} \underline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{\xi} \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array} \right\}$$

区分数 P を固定した問題を考える

計算機で扱えるようにするために区分数 P を制限する

$$\mathcal{PC}(P) := \left\{ x(\cdot) : \begin{array}{c} \exists \bar{\boldsymbol{x}}_p, \underline{\boldsymbol{x}}_p \in \mathbb{R}^k \ (p = 1, \ldots, P) \\ \text{s.t. } x(\boldsymbol{\xi}) = \max_{p=1,\ldots,P} \bar{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{\xi} - \max_{p=1,\ldots,P} \underline{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{\xi} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{PB}(P) := \left\{ y(\cdot) : \begin{array}{c} \exists P \in \mathbb{N}_+, \bar{\boldsymbol{y}}_p, \underline{\boldsymbol{y}}_p \in \mathbb{R}^k \ (p = 1, \ldots, P) \\ \text{s.t. } y(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_{p=1,\ldots,P} \bar{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{\xi} - \max_{p=1,\ldots,P} \underline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{\xi} \le 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array} \right\}$$

簡単な場合: $\mathcal{PC}(1)$ は線形関数の集合

以下では次の半無限計画問題を解くことを考える

$$Z(\Xi) := \left| \begin{array}{lll} \text{最小化} & \tau & \\ \text{制約条件} & x_i(\cdot) \in \mathcal{PC}(P) & (i = 1, \ldots, n) \\ & y_i(\cdot) \in \mathcal{PB}(P) & (i = 1, \ldots, q) \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\xi) \le \boldsymbol{C}\xi & (\xi \in \Xi) \\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\xi) \le \tau & (\xi \in \Xi) \end{array} \right.$$

緩和問題

有限個の不確実性ベクトルからなる集合 $\hat{\Xi}$ $(\subset \Xi, |\hat{\Xi}| < \infty)$ からなる問題を考える

$$
Z(\hat{\Xi}) := \left|\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \tau & \\
\text{制約条件} & x_i(\cdot) \in \mathcal{PC}(P) & (i = 1, \ldots, n) \\
 & y_i(\cdot) \in \mathcal{PB}(P) & (i = 1, \ldots, q) \\
 & \boldsymbol{Ax}(\xi) + \boldsymbol{By}(\xi) \leq \boldsymbol{C}\xi & (\xi \in \hat{\Xi}) \\
 & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\xi) \leq \tau & (\xi \in \hat{\Xi})
\end{array}\right.
$$

性質

- 混合整数線形計画問題として書ける (Big-M や SOS 制約を使う)
- 元の問題の緩和問題になっている, *i.e.*, $Z(\hat{\Xi}) \leq Z(\Xi)$
- 要素を増やすと下界値が上がる, *i.e.*, $\hat{\Xi}_i \subseteq \hat{\Xi}_{i+1} \Longrightarrow Z(\hat{\Xi}_i) \leq Z(\hat{\Xi}_{i+1})$

⇨ $\hat{\Xi}$ の要素を増やしながら (シナリオ生成) この問題を繰り返し解くアルゴリズム

シナリオ生成のための補助問題

緩和問題の最適解を $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ を用いた次の問題を考える

$$Q_0 := \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{\xi}) - \tau^* \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{\xi} \in \Xi \end{array} \right.$$

$$Q_j := \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}]_j \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{\xi} \in \Xi \end{array} \right. \quad (j = 1, \ldots, m)$$

性質

- 線形計画問題として書ける
- $Q_j > 0$ ➪ 元の問題の制約条件を違反

元の問題

$$Z(\Xi) := \left| \begin{array}{lll} \text{最小化} & \tau & \\ \text{制約条件} & x_i(\cdot) \in \mathcal{PC}(P) & (i = 1, \ldots, n) \\ & y_i(\cdot) \in \mathcal{PB}(P) & (i = 1, \ldots, q) \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \le \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} & (\boldsymbol{\xi} \in \Xi) \\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \le \tau & (\boldsymbol{\xi} \in \Xi) \end{array} \right.$$

切除平面法 [Blankenship–Falk 1976]

反復回数 $i := 1$ とし, 初期有限シナリオ集合 $\hat{\Xi}_1 \subset \Xi$ を適当に定める
loop
　$\hat{\Xi}_i$ での緩和問題を解く
　最適解を $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$, 最適値を $Z(\hat{\Xi}_i)$ とする
　for $j = 0, \ldots, m$ **do**
　　$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ での j 番目の補助問題を解く
　　最適解を ξ_j^*, 最適値を Q_j とする
　if $\forall j, Q_j \leq 0$ **then**　$\triangleright$ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ がすべての制約式を満たすかどうか
　　$\hat{\Xi}^* := \hat{\Xi}_i, Z(\hat{\Xi}^*) := Z(\hat{\Xi}_i)$
　　break　$\triangleright$ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ は最適解, $Z(\hat{\Xi}^*)$ は最適値
　else
　　$\hat{\Xi}_{i+1} := \hat{\Xi}_i \cup \{\xi_j : Q_j > 0\}$　$\triangleright$ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ が違反したシナリオを追加

問題点

- 各反復で緩和問題 (と補助問題) を厳密に解くことが前提
- 反復回数が多くなる (有限回での収束はいえない)

緩和問題を厳密に解くのをやめる

反復回数 $i := 1$ とし, 初期有限シナリオ集合 $\hat{\Xi}_1 \subset \Xi$ を適当に定める
loop
　$\hat{\Xi}_i$ での緩和問題を近似的に解く
　近似解を $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$, 目的関数値を $\bar{Z}(\hat{\Xi}_i)$ とする
　for $j = 0, \ldots, m$ **do**
　　$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ での j 番目の補助問題を解く
　　最適解を ξ_j^*, 最適値を Q_j とする
　if $\forall j, Q_j \leq 0$ **then**　▷ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ がすべての制約式を満たすかどうか
　　$\hat{\Xi}^* := \hat{\Xi}_i, \bar{Z}(\hat{\Xi}^*) := \bar{Z}(\hat{\Xi}_i)$
　　break　▷ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ は実行可能解, $Z(\hat{\Xi}^*)$ は最適値の上界値
　else
　　$\hat{\Xi}_{i+1} := \hat{\Xi}_i \cup \{\xi_j : Q_j > 0\}$　▷ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ が違反したシナリオを追加

性質

- 実行可能解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ が出力されることに変わりはない
- $\bar{Z}(\hat{\Xi}^*)$ は最適値の上界値, *i.e.*, $\bar{Z}(\hat{\Xi}^*) \geq Z(\Xi)$

終了条件を緩める

緩い終了条件: 制約を違反する確率が δ 以下ならば終了

$$p := \Pr\{\xi \in \Xi : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\xi) \not\leq \boldsymbol{C}\xi, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\xi) \not\leq \tau\} \leq \delta$$

p の厳密な計算は困難 ➪ 一様ランダムサンプリング [Calafiore–Dabbene 2002]

$$\hat{p}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\xi_i) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\xi_i) \not\leq \boldsymbol{C}\xi_i, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\xi_i) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\xi_i) \not\leq \tau] \leq \delta$$

Hoeffding の不等式 [Hoeffding 1963]

$$N \geq \frac{\log(2/\beta)}{2\hat{\epsilon}^2} \Longrightarrow \Pr\{|\hat{p}_N - p| \leq \hat{\epsilon}\} \geq 1 - 2\exp(-2\hat{\epsilon}^2 N)$$

統計的学習理論 (VC 次元など) [Anthony–Biggs 1992, Caramanis 2006, *etc.*]

$$N \geq \frac{4}{\delta}\left(2(1+2P(n+q)k)\log_2(4\mathrm{E}(m+1)(2P)(n+q))\ln\left(\frac{12}{\delta}\right) + \ln\left(\frac{2}{\beta}\right)\right)$$

$\Longrightarrow$ 出力 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ は確率 $1-\beta$ で実行可能解

補助問題も厳密に解くのもやめる

シナリオ集合の一様ランダムサンプリング $\tilde{\Xi}_N$ からなるサンプリング補助問題

$$Q_0 := \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{\xi}) - \tau^* \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Xi}_N \end{array} \right.$$

$$Q_j := \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}]_j \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Xi}_N \end{array} \right. \quad (j = 1, \ldots, m)$$

性質

- すべての $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{\Xi}_N$ について関数評価してからソートすれば解ける

アルゴリズム (実用版)

パラメータ $\delta, \hat{\epsilon}, \beta \in [0,1)$ を与え，十分大きな $N \in \mathbb{N}_+$ を与える
シナリオ集合の一様ランダムサンプリング $\tilde{\Xi}_N$ を生成する
反復回数 $i := 1$ とし，初期有限シナリオ集合 $\hat{\Xi}_1 \subset \Xi$ を適当に定める
loop
　$\hat{\Xi}_i$ での緩和問題を近似的に解く
　近似解を $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$，目的関数値を $\bar{Z}(\hat{\Xi}_i)$ とする
　for $j = 0, \ldots, m$ **do**
　　$\tilde{\Xi}_N, (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ での j 番目のサンプリング補助問題を解く
　　最適解を ξ_j^*，最適値を Q_j とする
　if $\hat{p}_N \leq \delta$ **then**
　　$\hat{\Xi}^* := \hat{\Xi}_i, \bar{Z}(\hat{\Xi}^*) := \bar{Z}(\hat{\Xi}_i)$
　　break
　else
　　$\hat{\Xi}_{i+1} := \hat{\Xi}_i \cup \{\xi_j : Q_j > 0\}$　　$\triangleright$ $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \tau^*)$ が違反したシナリオを追加

性質

- 最悪でも N 回の反復で終了する

下界値の計算

$\boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{y}(\xi)$ を ξ によって添字付けられた変数と見る

$$
S(\Xi) := \left| \begin{array}{lll} \text{最小化} & \tau & \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{x}(\xi) \in \mathbb{R}^n & (\xi \in \Xi) \\ & \boldsymbol{y}(\xi) \in \{0,1\}^q & (\xi \in \Xi) \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(\xi) \le \boldsymbol{C}\xi & (\xi \in \Xi) \\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\xi) \le \tau & (\xi \in \Xi) \end{array} \right.
$$

$S(\hat{\Xi}^*)$ は...

- 混合整数線形計画問題を解けば得られる
- 元の問題の最適値の下界になっている ⇨ 近似解の精度がわかる

$$
S(\hat{\Xi}^*) \le S(\Xi) = Z(\Xi) \le \bar{Z}(\hat{\Xi}^*)
$$

多段階適応型最適化

多段階の意思決定へ拡張

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \tau & \\
\text{制約条件} & x_{it}(\cdot) \in \mathcal{PC}(P) & (t = 1, \ldots, T;\, i = 1, \ldots, n) \\
& y_{it}(\cdot) \in \mathcal{PB}(P) & (t = 1, \ldots, T;\, i = 1, \ldots, q) \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{t} \boldsymbol{A}_{ts}\boldsymbol{x}_s(\xi^s) + \boldsymbol{B}_{ts}\boldsymbol{y}_s(\xi^s) \le \boldsymbol{C}_t \xi^t & (t = 1, \ldots, T;\, \xi \in \Xi) \\
& \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \boldsymbol{c}_t^\top \boldsymbol{x}_t(\xi^t) + \boldsymbol{d}_t^\top \boldsymbol{y}_t(\xi^t) \le \tau & (\xi \in \Xi)
\end{array}
$$

表記

- $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_T)^\top \in \Xi \subset \mathbb{R}^k$: 不確実性ベクトル
- ξ_t: 期 t に確定する情報
- $\xi^t = (\xi_1, \ldots, \xi_t)^\top$: 期 t までに確定している情報

1 段階のときと同様の解法で解ける

応用: 多段階在庫管理問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\max_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\left(\sum_{t\in\mathcal{T}} c_x x_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) + c_z z_t(\boldsymbol{\xi}^t) + o_t(\boldsymbol{\xi}^t)\right) & \\
\text{制約条件} & x_{t-1}(\cdot)\in\mathcal{R}_{t-1} & (t\in\mathcal{T}) \\
 & z_t(\cdot)\in\mathcal{R}_t & (t\in\mathcal{T}) \\
 & I_t(\cdot)\in\mathcal{R}_t & (t\in\mathcal{T}) \\
 & I_t(\boldsymbol{\xi}^t) = I_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) + x_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) + z_t(\boldsymbol{\xi}^t) - \xi_t & (t\in\mathcal{T};\boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & o_t(\boldsymbol{\xi}^t) \ge -c_b I_t(\boldsymbol{\xi}^t) & (t\in\mathcal{T};\boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & o_t(\boldsymbol{\xi}^t) \ge c_h I_t(\boldsymbol{\xi}^t) & (t\in\mathcal{T};\boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & x_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) \ge 0 & (t\in\mathcal{T};\boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & z_t(\boldsymbol{\xi}^t) \ge 0 & (t\in\mathcal{T};\boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & \displaystyle\sum_{s=1}^{t-1} x_s(\boldsymbol{\xi}^s) \le \bar{x}_t & (t\in\mathcal{T};\boldsymbol{\xi}\in\Xi)
\end{array}
$$

$$
\Xi = \left\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^k : \begin{array}{l} \xi_1 = 1, \\ l_i \le \xi_i \le u_i \ (i=2,\ldots,k), \displaystyle\sum_{i=2}^{k}\left|\xi_i - \frac{\bar{\xi}}{2}\right| \le \frac{\bar{\xi}}{2} \end{array}\right\}
$$

計算実験

問題例の規模に効くパラメータ

- $P = 2$
- $T = 5, 10, \ldots, 30$

終了条件パラメータ

- $\delta, \hat{\epsilon} = 0.005$
- $\beta, \hat{\beta} = 10^{-4}$

	緩和問題を厳密に解く		緩和問題の許容誤差: 5%	
T	上下界ギャップ	計算時間 [秒]	上下界ギャップ	計算時間 [秒]
5	2.9%	2.7	4.6%	0.5
10	2.5%	3.9	4.7%	3.0
15	1.2%	46.8	3.1%	9.6
20	1.3%	2681.1	4.7%	607.9
25	0.4%	2489.1	2.3%	3763.1
30	1.6%	36703.8	4.2%	4974.6

結果からいえること

- 最適解に近い解を返す
- 緩和問題を粗く解くとかなり高速化できる
- よい下界値が得られる

応用: 多段階ロットサイズ決定問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\max_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\left(\sum_{t\in\mathcal{T}} c_x x_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) + c_b I_t(\boldsymbol{\xi}^t) + \sum_{n\in\mathcal{N}} c_{y_n} q_n y_{nt}(\boldsymbol{\xi}^t)\right) & \\
\text{制約条件} & x_{t-1}(\cdot)\in\mathcal{R}_{t-1} & (t\in\mathcal{T}) \\
 & I_t(\cdot)\in\mathcal{R}_t & (t\in\mathcal{T}) \\
 & y_{nt}(\cdot)\in\mathcal{B}_t & (t\in\mathcal{T}; n\in\mathcal{N}) \\
 & I_t(\boldsymbol{\xi}^t) = I_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) + x_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) + q_n y_{nt}(\boldsymbol{\xi}^t) - \xi_t & (t\in\mathcal{T}; \boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & x_{t-1}(\boldsymbol{\xi}^{t-1}) \ge 0 & (t\in\mathcal{T}; \boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & I_t(\boldsymbol{\xi}^t) \ge 0 & (t\in\mathcal{T}; \boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & z_t(\boldsymbol{\xi}^t) \ge 0 & (t\in\mathcal{T}; \boldsymbol{\xi}\in\Xi) \\
 & \displaystyle\sum_{s=1}^{t-1} x_s(\boldsymbol{\xi}^s) \le \bar{x}_t & (t\in\mathcal{T}; \boldsymbol{\xi}\in\Xi)
\end{array}
$$

$$
\Xi = \left\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^k : \begin{array}{l} \xi_1 = 1, \\ l_i \le \xi_i \le u_i \ (i=2,\dots,k), \end{array}\right\}
$$

計算実験

問題例の規模に効くパラメータ

- $P = 1$
- $T = 2, 4, \ldots, 10$
- $N = 3$
- $\boldsymbol{\xi}^t = \xi_t$

終了条件パラメータ

- $\delta, \hat{\epsilon} = 0.005$
- $\beta, \hat{\beta} = 10^{-4}$

	緩和問題の許容誤差: 1%		緩和問題の許容誤差: 5%	
T	上下界ギャップ	計算時間 [秒]	上下界ギャップ	計算時間 [秒]
2	0.0%	0.1	1.2%	0.1
4	17.2%	3381.8	23.9%	781.6
6	34.5%	9181.0	38.4%	3298.1
8	37.6%	28742.7	38.1%	21885.5
10	—	—	41.1%	39141.5

結果からいえること

- 0–1 整数変数がないときには劣るが，まあまあ良い解を返す
- 使う情報の個数を制限すればある程度の問題は解ける

目次

おわりに

サプライ・チェイン・リスク管理における不確実性の表現

- サービス率, *i.e.*, 確率分布を考える ⇨ 確率計画問題
- 最悪の場合を想定 ⇨ ロバスト最適化問題

上手に最適化問題に定式化することが重要

近年の進展: 不確実性の取り扱いが精緻化 ⇦ 最適化計算の飛躍的な進歩

- サプライ・チェイン屋さんへ: 使える手法が増加しています
- 最適化屋さんへ: より大規模な問題を解けるようにがんばりましょう

Thank you for your attention!