

サプライ・チェーン・リスク管理と
人道支援ロジスティクス
第7章 数理最適化アプローチと実験的解析

久保幹雄

東京海洋大学

2014/5/09

発表の流れ

1 リスクを考慮した最適化モデル

2 確率的在庫モデル

- 途絶を考慮した新聞売り子モデル
- CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル
- 静的発注量モデル
- 適応型モデル
- 多段階モデル
- 複数調達モデル

3 動的ロットサイズ決定モデル

4 スケジューリングモデル

- 不確実性を考慮した PERT
- 不確実性を考慮した CPM
- 柔軟スケジューリングモデル
- 資源制約付きスケジューリングモデル

5 動的価格付けモデル

- 途絶を考慮しないモデル
- 途絶を考慮したモデル
- 参照価格を考慮したモデル

目次

1 リスクを考慮した最適化モデル

2 確率的在庫モデル

- 途絶を考慮した新聞売り子モデル
- CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル
- 静的発注量モデル
- 適応型モデル
- 多段階モデル
- 複数調達モデル

3 動的ロットサイズ決定モデル

4 スケジューリングモデル

- 不確実性を考慮した PERT
- 不確実性を考慮した CPM
- 柔軟スケジューリングモデル
- 資源制約付きスケジューリングモデル

5 動的価格付けモデル

- 途絶を考慮しないモデル
- 途絶を考慮したモデル
- 参照価格を考慮したモデル

リスクを考慮した最適化モデル

- シナリオを用いた確率最適化モデル
 - ▶ リスク中立モデル
 - ▶ CVaR 最小化モデル
- 途絶最適化モデル
- リスク最適化モデル

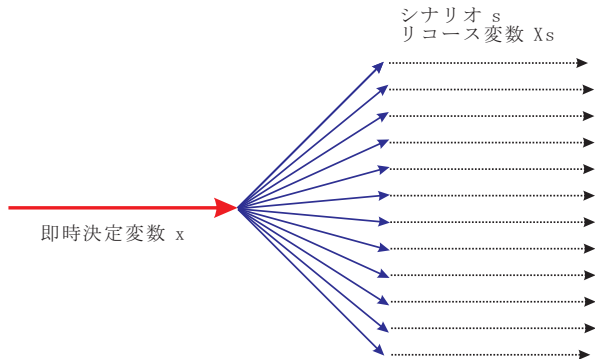
シナリオを用いた確率最適化

f : 即時決定変数 x に関する費用関数

\mathcal{F} : 即時決定変数に関する実行可能解の集合

g_s : シナリオ s におけるリソース変数 X_s に関する費用関数

$\mathcal{G}_s(x)$: シナリオ s における実行可能解の集合



リスク中立モデル

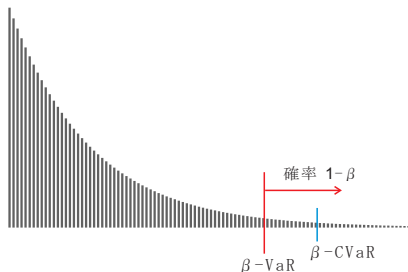
2 段階の期待値最小化の確率最適化モデル

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x) + \sum_{s \in S} p_s g_s(X_s) \\ \text{subject to} & x \in \mathcal{F} \\ & X_s \in \mathcal{G}_s(x) \quad \forall s \in S \end{array}$$

リスク回避モデル

β -VaR(Value at Risk): 与えられた確率 $0 < \beta < 1$ に対して, 費用が閾値 α を超えない確率が β 以上になるような最小の α

CVaR(条件付き VaR; Conditional Value at Risk): 費用が VaR を超えたときの費用の期待値



CVaR 最小化モデル

y : CVaR を最小化する解における VaR の値 (\leq CVaR)

z_s ($s \in S$): シナリオ s が発生したときの費用が VaR を超過した量

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s \in S} z_s \\ \text{subject to} & z_s \geq f(x) + \sum_{s \in S} p_s g_s(X_s) - y \quad \forall s \in S \\ & z_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\ & x \in \mathcal{F} \\ & X_s \in \mathcal{G}_s(x) \quad \forall s \in S \end{array}$$

途絶最適化モデル

航空機や鉄道の時刻表（ダイヤ）の乱れに対する復旧通常シナリオの下での最適解 x^* :

$$\begin{aligned} x^* = & \arg \min. && f(x) \\ & \text{subject to} && x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

途絶最適化モデル: h が逸脱ペナルティ

$$\begin{aligned} \text{minimize} & && f(X) + h(\xi_+, \xi_-) \\ \text{subject to} & && X \in \mathcal{F} \\ & && x^* + \xi_- - \xi_+ = X \\ & && \xi_-, \xi_+ \geq 0 \end{aligned}$$

リスク最適化モデル

= 確率最適化 + 途絶最適化

$$\text{minimize} \quad f(x) + \sum_{s \in S} p_s \{g_s(X_s) + h(\xi_+^s, \xi_-^s)\}$$

$$\text{subject to} \quad x \in \mathcal{F}$$

$$X_s \in \mathcal{G}_s(x) \quad \forall s \in S$$

$$x + \xi_-^s - \xi_+^s = X_s \quad \forall s \in S$$

$$\xi_-^s, \xi_+^s \geq 0 \quad \forall s \in S$$

サプライ・チェーン・リスク最適化

モデル名	準備フェイズ	応答フェイズ
確率的在庫 安全在庫配置	複数調達/在庫 複数調達/在庫	適応発注/緊急発注 調達先・リード時間変更
ロットサイズ決定	多モード/複数調達/在庫	モード選択/生産量調整
スケジューリング 配送計画	多モード/余裕時間/余裕資源 余裕時間/余裕資源	モード選択/リスケジューリング 緊急配車/リスケジューリング
ネットワーク設計	多モード/余裕資源/在庫	モード選択/リルーティング
収益管理	安全在庫/価格設定	価格変更

リスク最適化モデル + 実験的解析

目次

1 リスクを考慮した最適化モデル

2 確率的在庫モデル

- 途絶を考慮した新聞売り子モデル
- CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル
- 静的発注量モデル
- 適応型モデル
- 多段階モデル
- 複数調達モデル

3 動的ロットサイズ決定モデル

4 スケジューリングモデル

- 不確実性を考慮した PERT
- 不確実性を考慮した CPM
- 柔軟スケジューリングモデル
- 資源制約付きスケジューリングモデル

5 動的価格付けモデル

- 途絶を考慮しないモデル
- 途絶を考慮したモデル
- 参照価格を考慮したモデル

途絶を考慮した新聞売り子モデル

h : 新聞 1 部が売れ残ったときに課せられる在庫費用.

b : 新聞 1 部が品切れしたときに課せられる品切れ費用.

$D(n)$: 需要が定常であると仮定したときの, n 期分の需要量の合計を表す確率変数.

α : 調達先が途絶する確率.

β : 途絶から回復する確率.

推移行列

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

定常分布 u : up, d : down

$$(u, d) = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

期待費用の導出

n 期連続で途絶する確率 π_n

$$\pi_0 = u = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\pi_n = dp(n) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}(1 - \beta)^{n-1}$$

分布関数（途絶している期間が n 期以下である確率）

$$F(n) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(1 - \beta)^{n-1}$$

基在庫レベルが s のときの総費用の期待値

$$C(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n E [h[s - D(n+1)]^+ + b[D(n+1) - s]^+]$$

解析的モデルの結果

需要が一定のときの最適な基在庫レベル s^*

$$s^* = \mu + \sigma F^{-1} \left(\frac{b}{b+h} \right)$$

⇒ 途絶確率に対する階段関数

⇒ 需要だけが不確実のときの結果に類似

数理最適化モデル

S : 途絶と需要のシナリオの集合.

d_s : シナリオ s における需要量. 確率 π_n で $D(n)$.

p_s : シナリオ s の発生確率.

x : 発注量 (基在庫レベル) を表す変数.

I_s : シナリオ s における在庫量を表す変数.

B_s : シナリオ s におけるバックオーダー量を表す変数.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{s \in S} p_s (hI_s + bB_s) \\ \text{subject to} & x + B_s = d_s + I_s \quad \forall s \in S \\ & x \geq 0 \\ & I_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\ & B_s \geq 0 \quad \forall s \in S \end{array}$$

実験結果

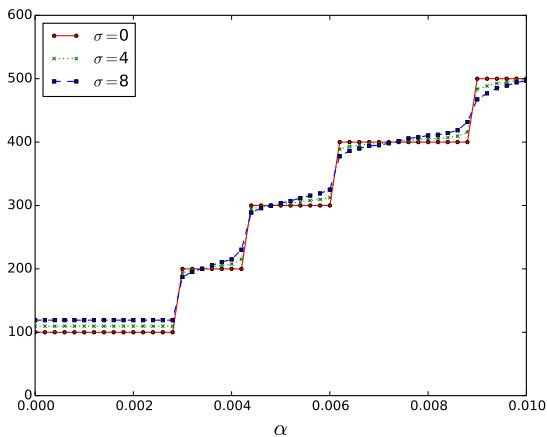


図: 途絶確率 α を変えたときの最適発注量（在庫レベル）の変化.

CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s \in S} p_s V_s \\ \text{subject to} & f_s = hI_s + bB_s \quad \forall s \in S \\ & V_s \geq f_s - y \quad \forall s \in S \\ & x_t + B_s = d_s + I_s \quad \forall s \in S \\ & x \geq 0 \\ & I_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\ & B_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\ & V_s \geq 0 \quad \forall s \in S \end{array}$$

CVaR モデルに対する実験 (1)

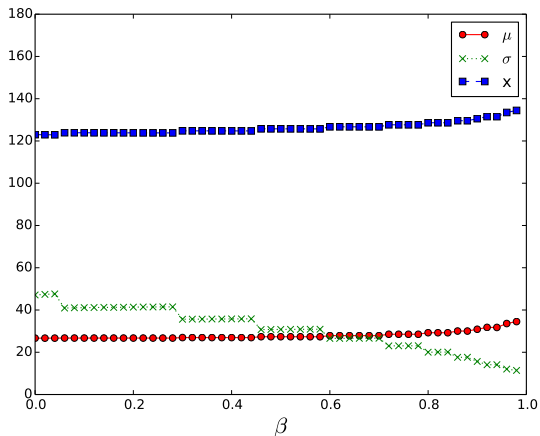


図: β を変えたときの期待費用 μ , 費用の標準偏差 σ , 最適発注量 x の変化.

CVaR モデルに対する実験 (2)

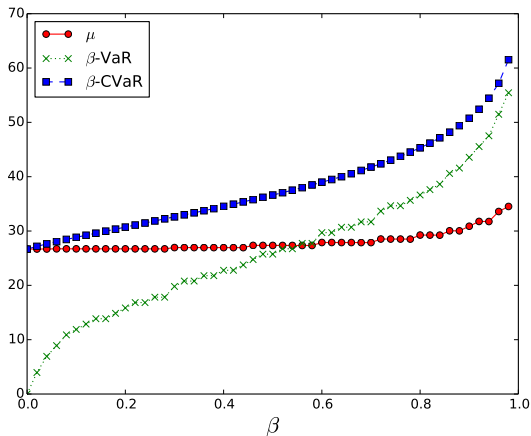


図: β を変えたときの平均費用 μ , β -VaR(= α), β -CVaR (右) の変化.

CVaR モデルに対する実験 (3)

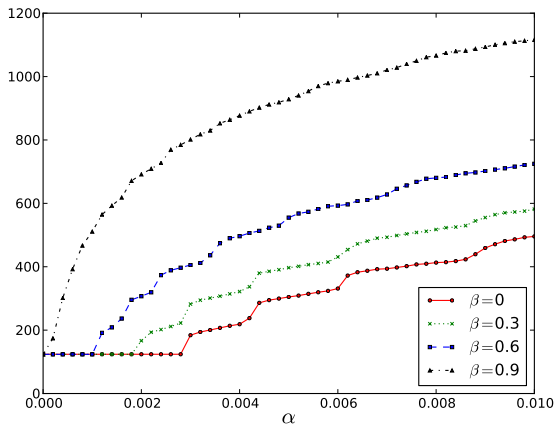


図: CVaR 最小化モデルに対する途絶確率 α を変えたときの最適発注量 (基在庫レベル) の変化.

(多期間) 静的発注量モデル (パラメータ)

T : 計画期間数

S : 途絶と需要のシナリオの集合

h : (品目 1 個あたり, 1 期間あたりの) 在庫費用.

b : (品目 1 個あたり, 1 期間あたりの) バックオーダー費用.

M : 発注量の上限 (容量).

d_t^s : シナリオ s における期 t の品目の需要量.

p_s : シナリオ s の発生確率.

δ_t^s : シナリオ s が期 t において調達先が途絶しているとき 0, それ以外のとき 1 のパラメータ.

静的発注量モデル (変数)

I_t^s : シナリオ s における期 t の在庫量.

B_t^s : シナリオ s における期 t の品切れ量.

x_t : 期 t における発注量.

静的発注量モデル

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{s \in S} p_s \sum_{t \in \mathcal{T}} (hI_t^s + bB_t^s) \\ \text{subject to} & I_{t-1}^s + \delta_t^s x_t + B_t^s = d_t^s + I_t^s + B_{t-1}^s \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & 0 \leq x_t \leq M \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ & I_t^s \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & B_t^s \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \end{array}$$

適応型モデル

シナリオ s の期 t における発注量

$$X_t^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} d_{t-j}^s y_j + x_t$$

途絶がある場合：

$$X_t^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} \{d_{t-j}^s y_j + (1 - \delta_{t-j}^s) Y_j\} + x_t$$

適応型モデル

$$\min. \sum_{s \in S} p_s \sum_{t \in \mathcal{T}} (hI_t^s + bB_t^s)$$

$$\text{s.t. } X_t^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} \{d_{t-j}^s y_j + (1 - \delta_{t-j}^s) Y_j\} + x_t \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S$$

$$I_{t-1}^s + \delta_t^s X_t^s + B_t^s = d_t^s + I_t^s + B_{t-1}^s \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S$$

$$0 \leq X_t^s \leq M \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S$$

$$x_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

$$I_t^s \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S$$

$$B_t^s \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S$$

実験の準備：非定常な需要の生成

平均を表すパラメータ μ (≥ 0)

需要の不安定性を表すパラメータ a ($0 \leq a \leq 1$)

誤差を表すパラメータ e_t (期ごとに独立な平均 0, 標準偏差 σ の正規分布)

$$d_1 = \mu + e_1$$

$$d_t = d_{t-1} - (1 - a)e_{t-1} + e_t \quad t = 2, 3, \dots$$

$\Rightarrow a = 0$ のときには, 平均 d , 標準偏差 σ の定常

$\Rightarrow a = 1$ のときには酔歩

比較実験

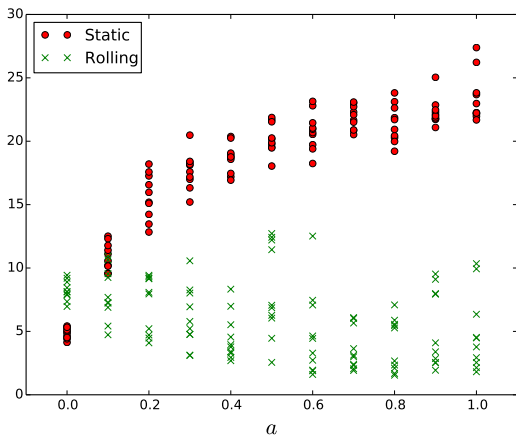


図: a を変えたときの静的発注量モデル (Static) とローリングホライズン方式 (Rolling) の適応型モデルに対する比率.

途絶に関する実験

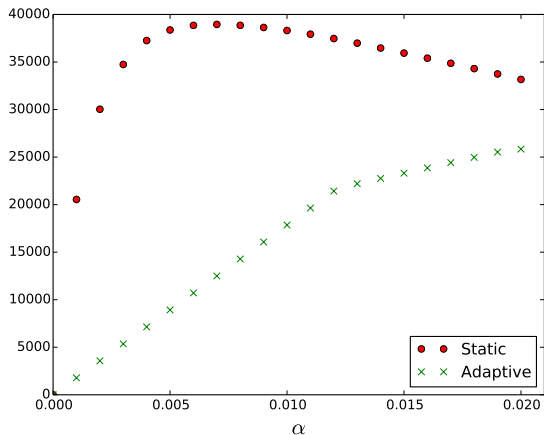


図: 途絶確率 α を変えたときの静的発注量モデル (Static) と適応型モデル (Adaptive) の費用.

拡張適応型モデル

容量制約がきつい場合

E_t^s : 需要量 d_t^s が容量 M を超過した量

$$X_t^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} (d_{t-j}^s y_j - E_{t-j}^s z_j) + x_t$$

需要に対する区分的線形なアフィン関数

拡張適応型モデル

需要：平均 100，標準偏差 50 の（負の場合は 0 とした）正規分布

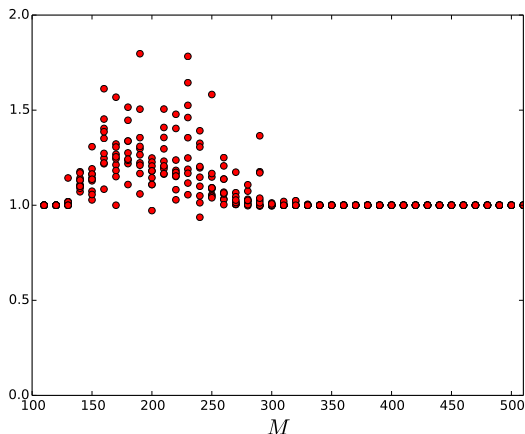


図: 容量 M を変えたときの適応型モデルの拡張適応型モデルに対する比率.

多段階静的発注量モデル

段階を表す添え字を下流（需要側）から順に $i (= 1, 2, \dots, N)$

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{s \in S} p_s \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^N (h_i I_{it}^s + b_i B_{it}^s) \\ \text{s. t.} \quad & I_{1,t-1}^s + \delta_{1t}^s x_{1t} + B_{1t}^s = d_t^s + I_{1t}^s + B_{1,t-1}^s & \forall t, s \\ & I_{i,t-1}^s + \delta_{it}^s x_{it} + B_{it}^s = \delta_{i-1,t}^s x_{i-1,t} + I_{it}^s + B_{i,t-1}^s & \forall i, t, s \\ & 0 \leq x_{it} \leq M & \forall i, t \\ & I_{it}^s \geq 0 & \forall i, t, s \\ & B_{it}^s \geq 0 & \forall i, t, s \end{aligned}$$

多段階適応型モデル

シナリオ s の期 t における第 i 段階の発注量

$$X_{it}^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} d_{t-j}^s y_{ij} + x_{it}$$

途絶がある場合

$$X_{it}^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} \left\{ d_{t-j}^s y_{ij} + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{k,t-j}^s) Y_{ikj} \right\} + x_{it}$$

多段階適応型モデル

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{s \in S} p_s \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^N (h_i I_{it}^s + b_i B_{it}^s) \\ \text{s.t.} \quad & X_{it}^s = \sum_{j=1}^{\min\{t-1, \theta\}} \left\{ d_{t-j}^s y_{ij} + \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{k,t-j}^s) Y_{ikj} \right\} + x_{it} \quad \forall i, t, s \\ & I_{1,t-1}^s + \delta_{1t}^s X_{1t}^s + B_{1t}^s = d_t^s + I_{1t}^s + B_{1,t-1}^s \quad \forall t, s \\ & I_{i,t-1}^s + \delta_{it}^s X_{it}^s + B_{it}^s = \delta_{i-1,t}^s X_{i-1,t}^s + I_{it}^s + B_{i,t-1}^s \quad \forall i, t, s \\ & 0 \leq X_{it}^s \leq M \quad \forall i, t, s \\ & x_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \\ & I_{it}^s \geq 0 \quad \forall i, t, s \\ & B_{it}^s \geq 0 \quad \forall i, t, s \end{aligned}$$

実験結果

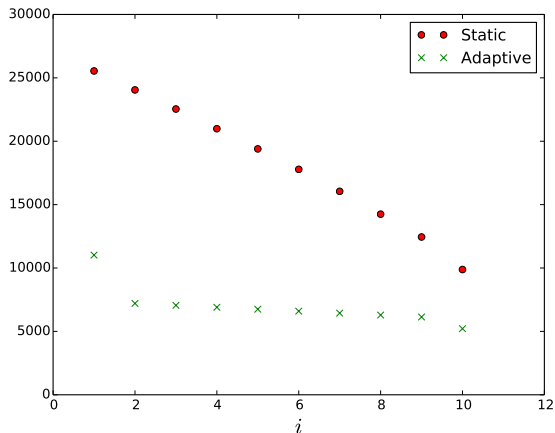


図: 途絶する段階を変えたときの静的発注量モデル (Static) と適応型モデル (Adaptive) の費用 ($\alpha = 0.01$).

複数調達モデル

信頼できない供給地点への発注量 x_{it}^U , 費用 c^U

途絶しない供給地点への発注量 x_{it}^R , 費用 c^R

緊急時対応計画 (contingency plan) の発注量 x_{it}^C , 費用 c^C

$\Rightarrow c^U < c^R < c^C$ が成立

複数調達モデル

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{s \in S} p_s \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^N (h_i I_{it}^s + b_i B_{it}^s \\ & \quad + c^U \delta_{it}^s x_{it}^U + c^R x_{it}^R + c^C (1 - \delta_{it}^s) x_{it}^C) \\ \text{s.t.} \quad & I_{1,t-1}^s + \delta_{1t}^s x_{1t}^U + x_{1t}^R + (1 - \delta_{1t}^s) x_{1t}^C + B_{1t}^s = \\ & \quad d_t^s + I_{1t}^s + B_{1,t-1}^s \quad \forall t, s \\ & I_{i,t-1}^s + \delta_{it}^s x_{it}^U + x_{it}^R + (1 - \delta_{it}^s) x_{it}^C + B_{it}^s = \\ & \quad \delta_{i-1,t}^s x_{i-1,t} + I_{it}^s + B_{i,t-1}^s \quad \forall i, t, s \\ & x_{it}^U, x_{it}^R, x_{it}^C \geq 0 \quad \forall i, t \\ & I_{it}^s \geq 0 \quad \forall i, t, s \\ & B_{it}^s \geq 0 \quad \forall i, t, s \end{aligned}$$

実験結果

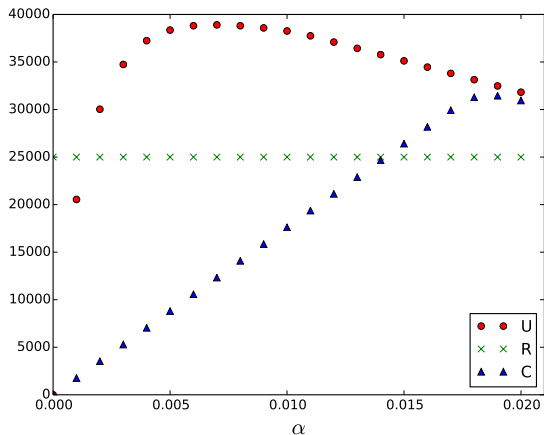


図: 途絶確率 α を変えたときの信頼できない供給地点のみ (U), 信頼できる供給地点のみ (R), 緊急時対応 (C) の費用.

目次

- 1 リスクを考慮した最適化モデル
- 2 確率的在庫モデル
 - 途絶を考慮した新聞売り子モデル
 - CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル
 - 静的発注量モデル
 - 適応型モデル
 - 多段階モデル
 - 複数調達モデル
- 3 動的ロットサイズ決定モデル
- 4 スケジューリングモデル
 - 不確実性を考慮した PERT
 - 不確実性を考慮した CPM
 - 柔軟スケジューリングモデル
 - 資源制約付きスケジューリングモデル
- 5 動的価格付けモデル
 - 途絶を考慮しないモデル
 - 途絶を考慮したモデル
 - 参照価格を考慮したモデル

動的ロットサイズ決定モデル（パラメータ）

T : 計画期間数.

S : シナリオの集合.

f_t : 期 t において生産を行うために必要な段取り（固定）費用.

c_t : 期 t における品目 1 個あたりの生産変動費用.

h_t : 期 t における在庫費用.

b_t : 期 t におけるバックオーダー費用.

d_t^s : シナリオ s の期 t における品目の需要量.

M_t : 期 t における生産可能量の上限.

φ_s : シナリオ s の発生確率.

δ_t^s : シナリオ s が期 t において生産途絶をしているとき 0, それ以外のとき 1 のパラメータ,

動的ロットサイズ決定モデル（変数）

変数

I_t^s : シナリオ s における期 t の在庫量.

B_t^s : シナリオ s における期 t のバックオーダー量.

x_t : 期 t における生産量を表す変数.

y_t : 期 t に生産を行うとき 1, それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数.

動的ロットサイズ決定モデル

$$\text{minimize } \sum_{s \in S} \sum_{t \in \mathcal{T}} \{ \delta_s^t (f_t y_t + c_t x_t) + \varphi_s (h_t I_t^s + b_t B_t^s) \}$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } \quad & I_{t-1}^s + B_t^s + \delta_s^t x_t = d_t^s + I_t^s + B_{t-1}^s && \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & x_t \leq M_t y_t && \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & I_0^s = B_0^s = 0 && \forall s \in S \\ & x_t \geq 0, y_t \in \{0, 1\} && \forall t \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

実験 1

在庫モデルの途絶と同様

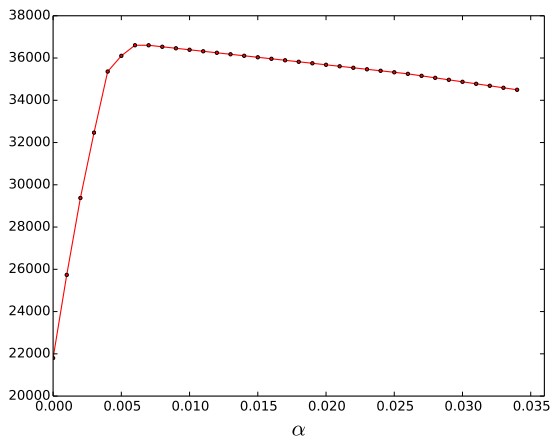


図: 途絶確率 α を変えたときの総費用の変化.

実験 2

途絶確率が増すと多頻度で発注（発注量小）

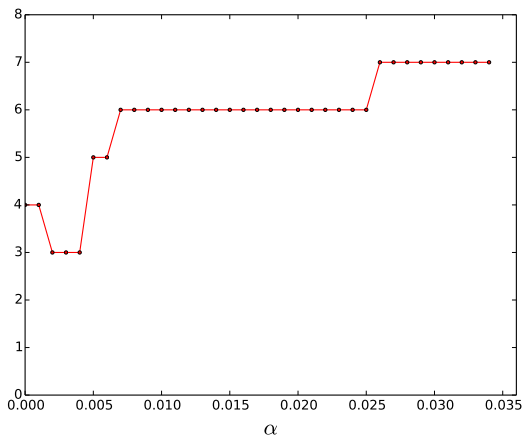


図: 途絶確率 α を変えたときの発注回数の変化.

実験 3

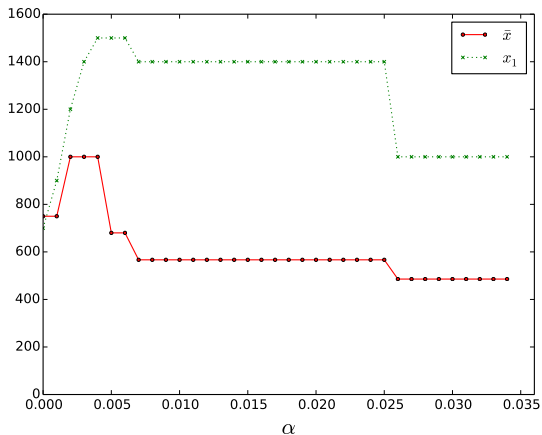


図: 途絶確率 α を変えたときの発注量の平均値 \bar{x} と 1 期の発注量 x_1 の変化.

目次

- 1 リスクを考慮した最適化モデル
- 2 確率的在庫モデル
 - 途絶を考慮した新聞売り子モデル
 - CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル
 - 静的発注量モデル
 - 適応型モデル
 - 多段階モデル
 - 複数調達モデル
- 3 動的ロットサイズ決定モデル
- 4 スケジューリングモデル
 - 不確実性を考慮した PERT
 - 不確実性を考慮した CPM
 - 柔軟スケジューリングモデル
 - 資源制約付きスケジューリングモデル
- 5 動的価格付けモデル
 - 途絶を考慮しないモデル
 - 途絶を考慮したモデル
 - 参照価格を考慮したモデル

不確実性を考慮した PERT

集合

\mathcal{J} : ジョブの集合 ; 添え字は j, k .

\mathcal{P} : ジョブ間の先行制約を表す集合.

\mathcal{S} : シナリオの集合, 添え字は s .

パラメータ

p_j^s : シナリオ s におけるジョブ j の処理時間.

w_j : ジョブ j の基スケジュールからの逸脱ペナルティを計算する際の重み.

ρ_s : シナリオ s の発生確率.

変数

st_j : 基スケジュールにおけるジョブ j の開始時刻.

ST_j^s : シナリオ s の発生時におけるジョブ j の開始時刻.

不確実性を考慮した PERT

線形最適化としての定式化

$$\begin{array}{ll} \min. & \sum_{s \in S} \varphi_s \left\{ ST_n^s + \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j |st_j - ST_j^s| \right\} \\ \text{s. t.} & ST_j^s + p_j^s \leq ST_k^s \quad \forall (j, k) \in \mathcal{P}; s \in S \\ & st_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J} \\ & ST_j^s \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \end{array}$$

実験

- ジョブは 3×5 の格子ネットワーク
- 点 (i, j) から $(i + 1, j)$ ならびに (i, j) から $(i, j + 1)$ に対して枝
- 処理時間は平均 $\mu = 100$, 標準偏差 $\sigma = 1, 10, 50, 100$ の (切断) 正規分布

結果 1

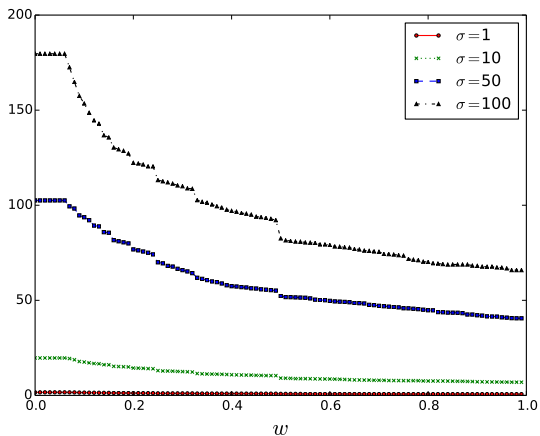


図: パラメータ w を変えたときの、完了時刻の標準偏差の変化.

結果 2

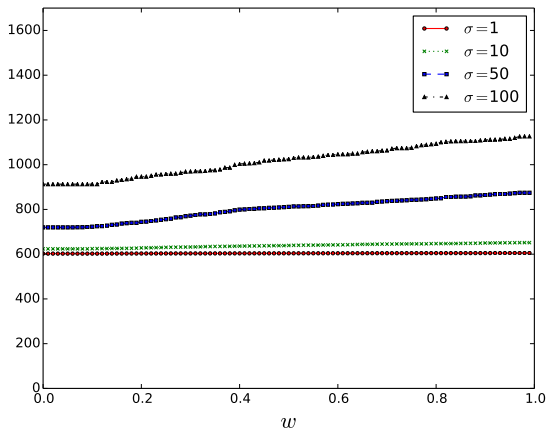


図: パラメータ w を変えたときの, 完了時刻の変化.

不確実性を考慮した CPM (静的モデル)

パラメータ

a_j : ジョブ j の処理時間を 1 単位短縮するために必要な費用.

L_j : ジョブ j の処理時間の下限.

変数

x_j : ジョブ j の処理時間を短縮させるために投入する量.

不確実性を考慮した CPM (静的モデル)

線形最適化による定式化

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \sum_{s \in S} \varphi_s ST_n^s + \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j x_j \\ \text{s. t.} & ST_j^s + p_j^s - x_j \leq ST_k^s \quad \forall (j, k) \in \mathcal{P}; s \in S \\ & p_j^s - x_j \geq L_j \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \\ & ST_j^s \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \end{array}$$

不確実性を考慮した CPM（適応型モデル）

- I_j : ジョブ j を処理する前に完了していなければならないジョブの集合
- シナリオ s におけるジョブ j の平均値 μ_j からの（上方・下方）逸脱量

$$e_s^+ = \max\{p_j^s - \mu_j, 0\}$$

$$e_s^- = \max\{\mu_j - p_j^s, 0\}$$

- X_j^s : ジョブ j へのシナリオ s に依存した投入量を表す変数:

$$X_j^s = x_j + \sum_{i \in I_j} (e_s^+ Y_{ij} + e_s^- Z_{ij})$$

不確実性を考慮した CPM (適応型モデル)

線形最適化による定式化

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{s \in S} \varphi_s ST_n^s + \sum_{s \in S} \sum_{j \in \mathcal{J}} \varphi_s a_j X_j^s \\ \text{s. t.} \quad & ST_j^s + p_j^s - X_j^s \leq ST_k^s \quad \forall (j, k) \in \mathcal{P}; s \in S \\ & X_j^s = x_j + \sum_{i \in I_j} (e_s^+ Y_{ij} + e_s^- Z_{ij}) \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \\ & p_j^s - X_j^s \geq L_j \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \\ & ST_j^s \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \end{aligned}$$

実験 1

短縮費用 a が小さいときには適応型が有効

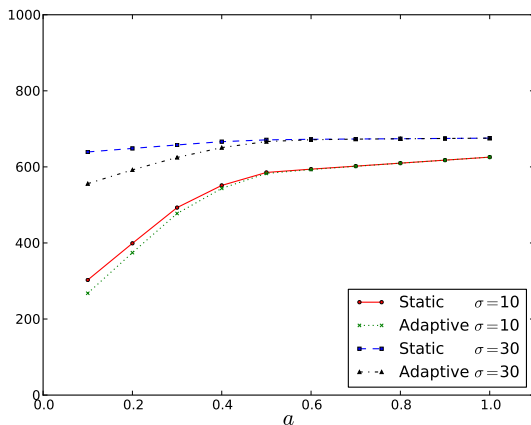


図: パラメータ a を変えたときの, 目的関数値の変化.

実験 2

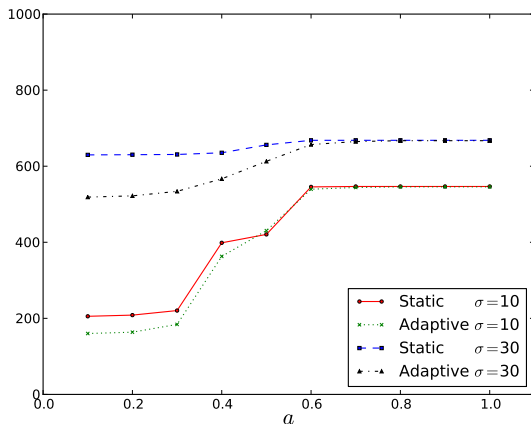
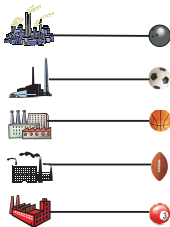


図: パラメータ a を変えたときの, 完了時刻の期待値の変化.

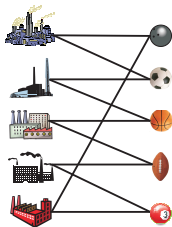
サプライ・チェーンの柔軟性

工場 = 資源

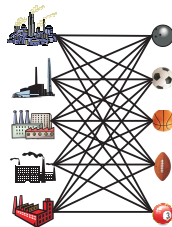
製品 = ジョブ



(a)



(b)



(c)

図: 工場への製品割当モデル (Tomlin-Graves).

(a) 1-柔軟性. (b) 2-柔軟性. (c) 完全柔軟性.

柔軟スケジューリングモデル

集合

\mathcal{J} : ジョブの集合.

R : 資源の集合.

S : シナリオの集合,

パラメータ

c_{jr} : ジョブ j の資源 r への割当費用.

U_r : 資源 r の使用可能量上限.

φ_s : シナリオ s の発生確率.

a_j^s : シナリオ s におけるジョブ j の処理時間.

δ_r^s : シナリオ s で利用可能な資源であるとき 1.

変数

x_{jr} : ジョブ j が資源 r で処理可能なとき 1.

X_{jr}^s : シナリオ s において, ジョブ j を資源 r で処理する割合.

y_r^s : シナリオ s における資源 r の超過量.

柔軟スケジューリングモデル

$$\begin{array}{ll} \min. & \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{r \in R} c_{jr} x_{jr} + \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} p_s y_r^s \\ \text{s. t.} & \sum_{r \in R} X_{jr}^s = 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S \\ & \sum_{j \in J} a_j^s X_{jr}^s \leq \delta_r^s U_r + y_r^s \quad \forall r \in R; s \in S \\ & X_{jr}^s \leq x_{jr} \quad \forall j \in \mathcal{J}; r \in R; s \in S \\ & x_{jr} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J}; r \in R \\ & X_{jr}^s \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}; r \in R; s \in S \\ & y_r^s \geq 0 \quad \forall r \in R; s \in S \end{array}$$

実験 1

$U_r = 125$, a_j^s : 平均 100, 標準偏差 30 の正規分布, $c_{jr} = 1/10^k$
2-柔軟性から完全柔軟性へ移行

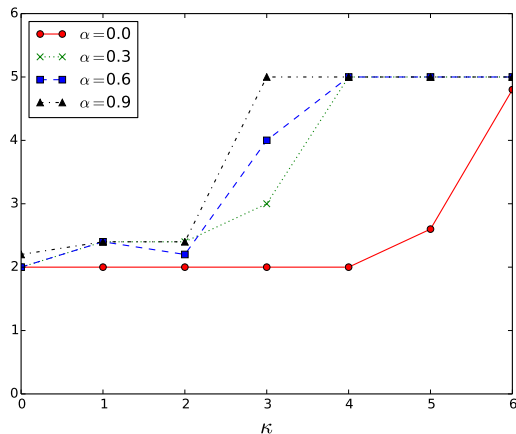


図: 平均次数の変化.

実験 2

資源 1 の使用可能量上限 U_1 を 1000 に設定

$\alpha = 0$ のときは資源 1 に集中

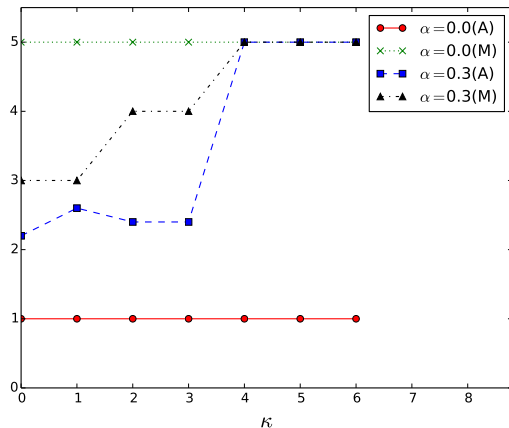


図: 平均次数 (A) と最大次数 (M) の変化.

資源制約付きスケジューリングモデル (集合)

\mathcal{J} : ジョブの集合.

\mathcal{R} : 資源の集合.

\mathcal{P} : ジョブ間の先行制約を表す集合.

\mathcal{S} : シナリオの集合,

パラメータ

T : 最大の期数.

p_j^s : シナリオ s におけるジョブ j の処理時間.

w_j : ジョブ j の基スケジュールからの逸脱ペナルティを計算する際の重み.

c_{jt}^s : シナリオ s においてジョブ j を期 t に開始したときの費用.

φ_s : シナリオ s の発生確率.

a_{jrt}^s : シナリオ s におけるジョブ j の開始後
 t ($= 0, 1, \dots, p_j - 1$) 期経過時の処理に要する資源 r
の量.

RUB_{rt}^s : シナリオ s における時刻 t における資源 r の使用可能量の上限.

変数

X_{jt}^s : シナリオ s の発生時においてジョブ j を時刻 t に開始するとき 1, それ以外のとき 0 を表す 0-1 変数.

st_j : 基スケジュールにおけるジョブ j の開始時刻.

ST_j^s : シナリオ s の発生時におけるジョブ j の開始時刻.

定式化

$$\text{minimize} \quad \sum_{s \in S} \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t=1}^{T-p_j+1} \varphi_s c_{jt}^s X_{jt}^s + \sum_{s \in S} \sum_{j \in \mathcal{J}} \varphi_s w_j |st_j - ST_{jt}^s|$$

subject to

ジョブ遂行制約

開始時刻制約

資源制約

先行制約

$$st_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

$$ST_j^s \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S$$

$$X_{jt}^s \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J}; t = 1, 2, \dots, T - p_j + 1; s \in S$$

定式化

ジョブ遂行制約 :

$$\sum_{t=1}^{T-p_j+1} X_{jt}^s = 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S$$

開始時刻制約 :

$$\sum_{t=2}^{T-p_j+1} (t-1)X_{jt}^s = ST_j^s \quad \forall j \in \mathcal{J}; s \in S$$

資源制約 :

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{\tau=\max\{t-p_j^s+1, 1\}}^{\min\{t, T-p_j^s+1\}} a_{jr, t-\tau}^s X_{j\tau}^s \leq RUB_{rt}^s \quad \forall r \in \mathcal{R}; t \in \mathcal{T}; s \in S$$

先行制約 :

$$ST_j^s + p_j^s \leq ST_k^s \quad \forall (j, k) \in \mathcal{P}; s \in S$$

実験概要

- ジョブ数 10, 処理時間 1 から 5 の一様乱数, 3 機械並列ショップ
- 1 期以外のすべての期が一度だけ途絶確率 α で途絶
- 回復確率 $\beta = [0.3, 0.5, 0.8, 1.0]$
- 緩和問題で評価 (= ランダム化戦略)

実験結果 1

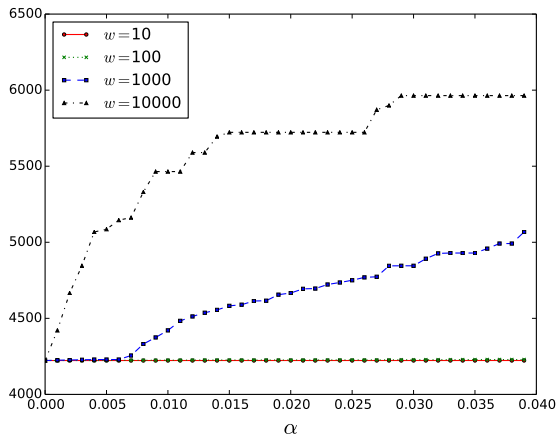


図: 総費用の変化.

実験結果 2

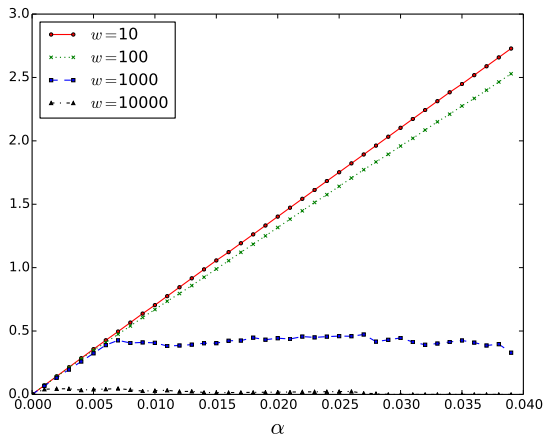


図: 基スケジューリングからのずれの合計の変化.

目次

- 1 リスクを考慮した最適化モデル
- 2 確率的在庫モデル
 - 途絶を考慮した新聞売り子モデル
 - CVaR を評価尺度とした新聞売り子モデル
 - 静的発注量モデル
 - 適応型モデル
 - 多段階モデル
 - 複数調達モデル
- 3 動的ロットサイズ決定モデル
- 4 スケジューリングモデル
 - 不確実性を考慮した PERT
 - 不確実性を考慮した CPM
 - 柔軟スケジューリングモデル
 - 資源制約付きスケジューリングモデル
- 5 動的価格付けモデル
 - 途絶を考慮しないモデル
 - 途絶を考慮したモデル
 - 参照価格を考慮したモデル

多期間動的価格付けモデル

パラメータ

T : 計画期間数.

S : シナリオの集合.

h_t : 期 t における在庫費用.

b_t : 期 t におけるバックオーダー費用.

φ_s : シナリオ s の発生確率.

ϵ_t^s : シナリオ s , 期 t における需要の不確実性を表すパラメータ.

多期間動的価格付けモデル

変数

x_t : 期 t における生産量を表す変数.

p_t : 期 t における価格を表す変数.

d_t : 期 t における基本需要量:

$$d_t = -a(p_t - p_0) + d_0$$

加法的な不確実性

$$D_t^s = d_t + \epsilon_t^s$$

乗法的な不確実性

$$D_t^s = \epsilon_t^s d_t$$

I_t^s : シナリオ s における期 t の在庫量.

B_t^s : シナリオ s における期 t の品切れ量を表す変数.

定式化

加法的, 乘法的を一般化 : $D_t^s = \phi(d_t, \epsilon_t^s)$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{s \in S} \sum_{t \in \mathcal{T}} \varphi_s (D_t^s p_t - h_t I_t^s - b_t B_t^s) \\ \text{s. t.} \quad & I_{t-1}^s + x_t + B_t^s = D_t^s + I_t^s + B_{t-1}^s \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & d_t = -a(p_t - p_0) + d_0 \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ & D_t^s = \phi(d_t, \epsilon_t^s) \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & p_0 \leq p_t \leq p_0 + d_0/a \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ & x_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ & I_t^s \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & B_t^s \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \end{aligned}$$

新聞売り子モデルに対する実験

加法的不確実性

標準偏差 σ , 変動係数 $\sigma/\text{需要量}$

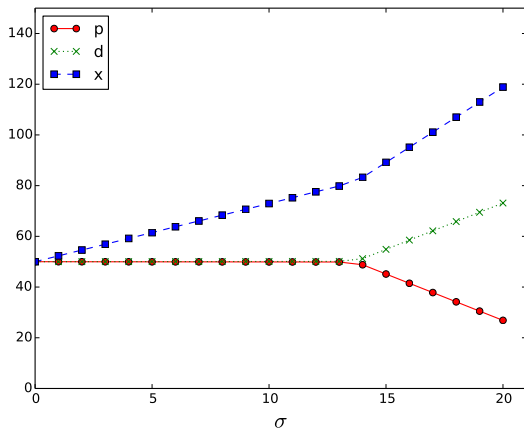


図: 価格 (p), 需要 (d), 発注量 (x) の変化.

新聞売り子モデルに対する実験

加法的不確か性

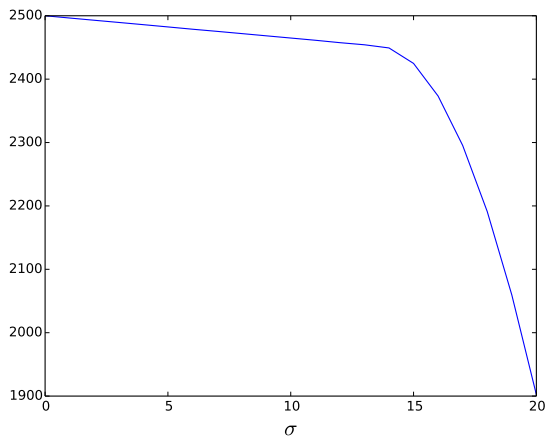


図: 総収益の変化.

新聞売り子モデルに対する実験

乗法的不確か性

標準偏差 $\sigma \times$ 需要量, 変動係数 σ

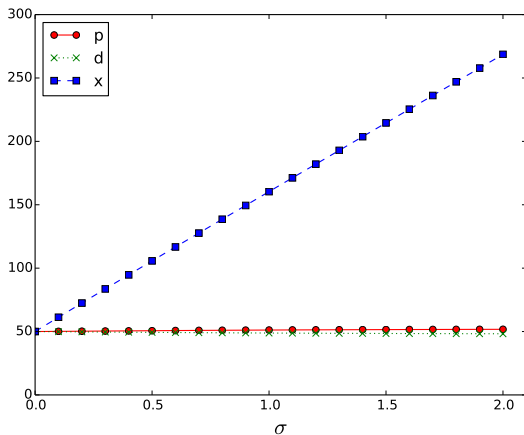


図: 価格 (p), 需要 (d), 発注量 (x) の変化.

新聞売り子モデルに対する実験.

乗法的不確実性

多期間の場合でも同様の結果

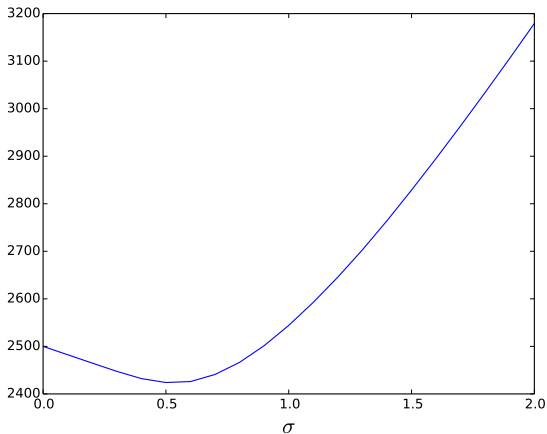


図: 総収益の変化.

CVaR 最小化モデル

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s \in S} \wp_s V_s \\ \text{subject to} \quad & f_s = \sum_{t \in \mathcal{T}} (h_t I_t^s + b_t B_t^s + c_t x_t - D_t^s p_t) \quad \forall s \in S \\ & V_s \geq f_s - \alpha \quad \forall s \in S \\ & I_{t-1}^s + x_t + B_t^s = D_t^s + I_t^s + B_{t-1}^s \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & \dots \\ & V_s \geq 0 \quad \forall s \in S \end{aligned}$$

CVaR 最小化モデルに対する実験

加法的な不確実性

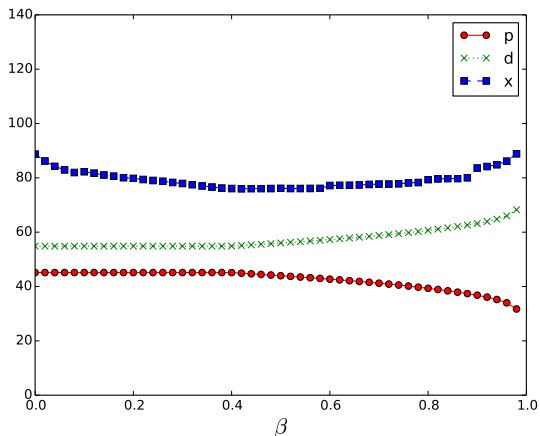


図: 最適価格 p , 需要量 d , 最適発注量 x の変化.

CVaR 最小化モデルに対する実験

加法的な不確実性

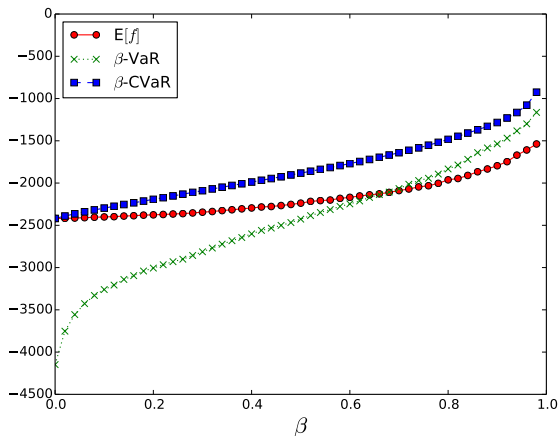


図: 平均費用 $E[f]$, β -VaR(= α), β -CVaR の変化.

CVaR 最小化モデルに対する実験

乗法的不確実性

解析的なモデルの結果（価格減少；条件付き）と異なる！

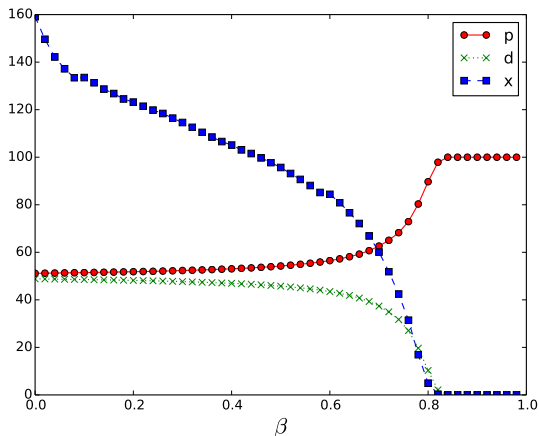


図: 最適価格 p , 需要量 d , 最適発注量 x の変化.

CVaR 最小化モデルに対する実験

乗法的不確実性

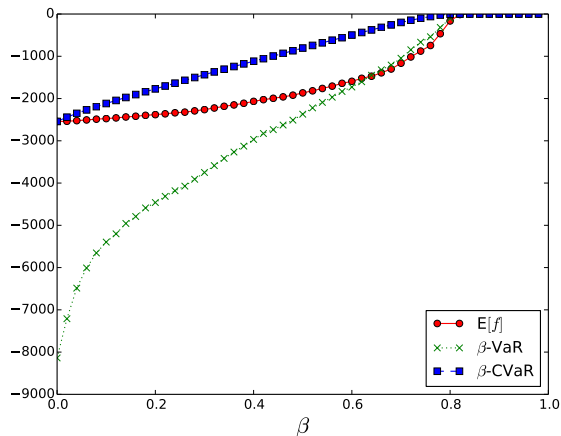


図: 平均費用 $E[f]$, β -VaR(= α), β -CVaR の変化.

途絶を考慮したモデル

δ_t^s : シナリオ s が期 t において調達先が途絶しているとき 0, それ以外のとき 1 のパラメータ.

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{s \in S} \sum_{t \in \mathcal{T}} \rho_s (D_t^s p_t - h_t I_t^s - b_t B_t^s) \\ \text{s. t.} \quad & I_{t-1}^s + \delta_t^s x_t + B_t^s = D_t^s + I_t^s + B_{t-1}^s \quad \forall t \in \mathcal{T}; s \in S \\ & \dots \end{aligned}$$

実験結果

需要が乗法的な不確実性をもつ場合と類似

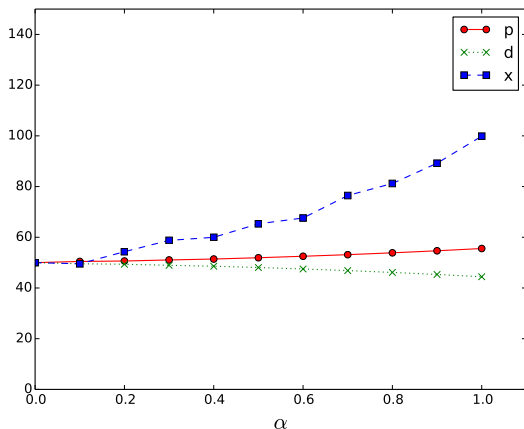


図: 途絶確率 α を変えたときの価格 (p), 需要 (d), 発注量 (x) の平均の変化.

実験結果

需要が加法的不確実性をもつ場合と類似

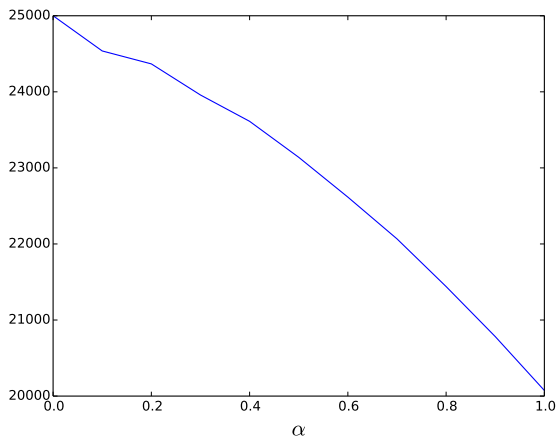


図: 途絶確率 α を変えたときの総収益の変化.

参照価格

第 t 期の参照価格 R_t (変数) :

$$R_t = (1 - \alpha)P_{t-1} + \alpha R_{t-1}$$

α が 0 のとき, 消費者はすぐに新しい価格を参照価格
 α が 1 のとき最初の参照価格を頑固に固持

需要関数

$$D_t = \psi(P_t, R_t) = \begin{cases} \bar{D}_t + \zeta(R_t - P_t) & R_t - P_t \geq 0 \text{ のとき} \\ \bar{D}_t - \eta(P_t - R_t) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$\eta > \zeta$: ロス回避

$\eta = \zeta$: ロス中立

$\eta < \zeta$: ロス選好

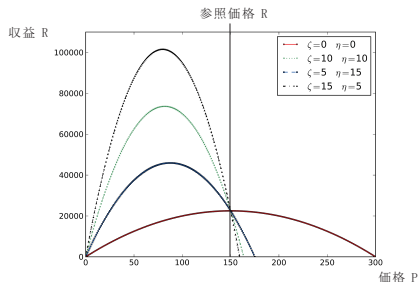


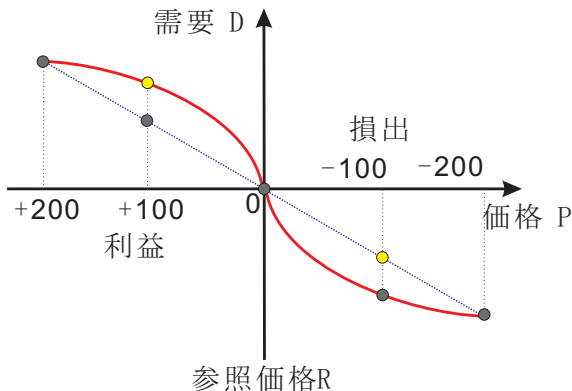
図: 参照価格 150, 需要を線形 $D = 300 - P$ としたときの収益曲線.

プロスペクト理論

以下のうちどちらを選びますか？

A: 100 万円が無条件で手に入る。

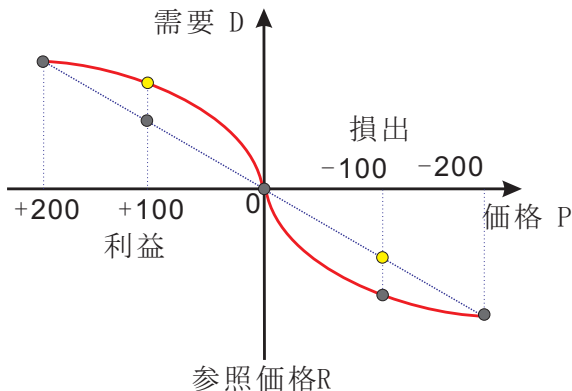
B: 確率 $1/2$ で 200 万円が手に入り、確率 $1/2$ で何ももらえない。



プロスペクト理論

以下のうちどちらを選びますか？

- A: 借金 100 万円を支払う.
- B: 確率 $1/2$ で 200 万円を支払い, 確率 $1/2$ で借金がチャラになる.



需要曲線

パラメータ $0 < \beta, \gamma < 1$

$$\psi(P_t, R_t) = \begin{cases} \bar{D}_t + \zeta(R_t - P_t)^\beta & R_t - P_t \geq 0 \text{ のとき} \\ \bar{D}_t - \eta(P_t - R_t)^\gamma & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

リスク回避：

利益を得る領域 ($R_t > P_t$) では凸関数

損出を被る領域 ($P_t > R_t$) では凹関数

需要曲線

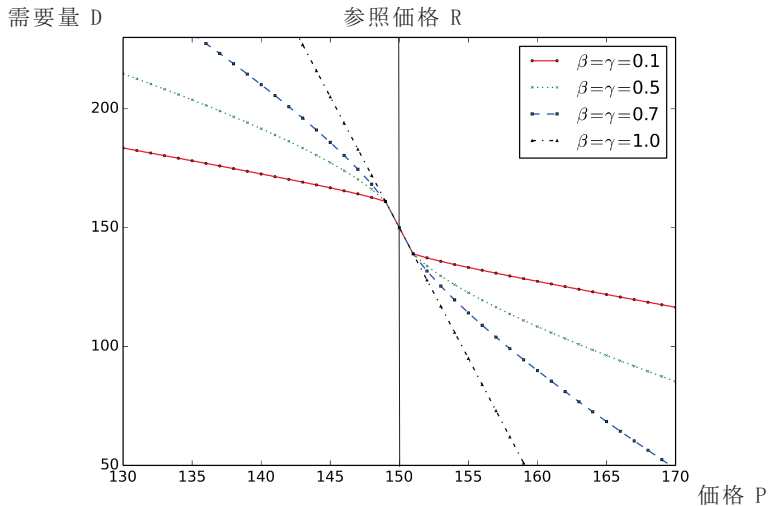


図: プロスペクト理論に基づく場合の需要曲線.

収益曲線

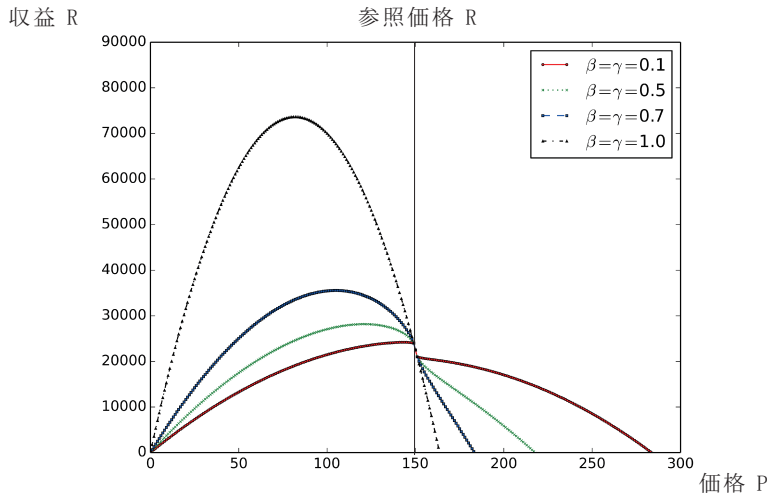


図: プロスペクト理論に基づく場合の収益曲線.

実験結果 (ロス中立)

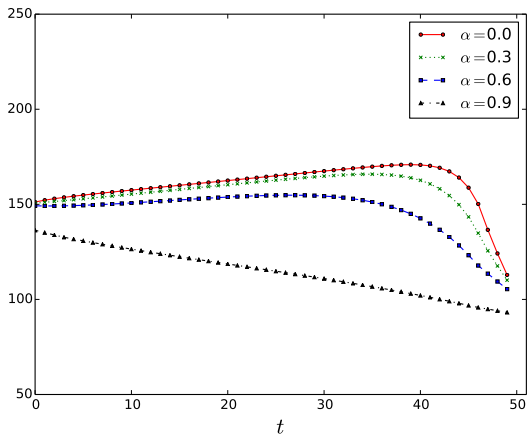


図: ロス中立 ($\zeta = \gamma = 10$) のときのパラメータ α を変えたときの価格の変化.

実験結果 (ロス回避)

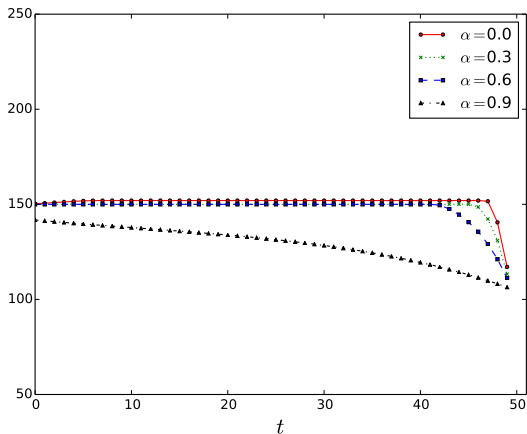


図: ロス回避 ($\zeta = 5, \eta = 15$) のときのパラメータ α を変えたときの価格の変化.

実験結果 (ロス選好)

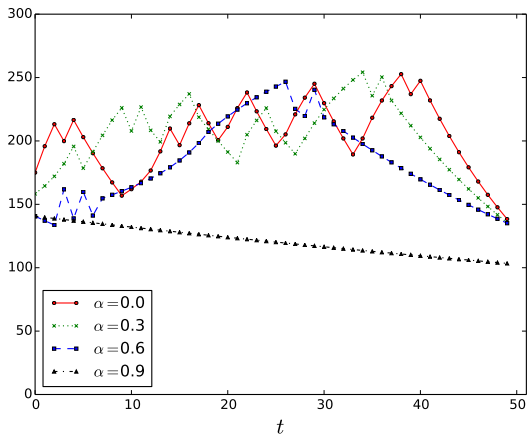


図: ロス選好 ($\zeta = 15, \eta = 5$) のときのパラメータ α を変えたときの価格の変化.

実験結果（プロスペクト理論）

参照価格の初期値 = 最終期の参照価格

計画期間 $T = 200$, $\zeta = 8$, $\eta = 12$ （ロス回避）

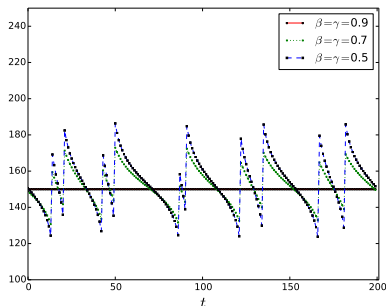


図: リスク回避のパラメータ β, γ を変えたときの価格の変化. $\alpha = 0$.

実験結果（プロスペクト理論）

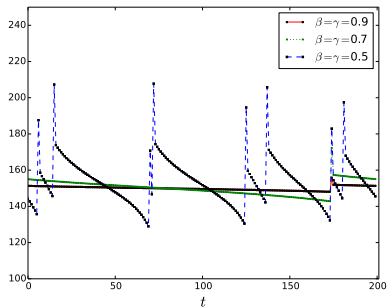


図: リスク回避のパラメータ β, γ を変えたときの価格の変化. $\alpha = 0.5$.