移動時間と燃料消費量の不確実性に対応するためのロバスト最短路モデル

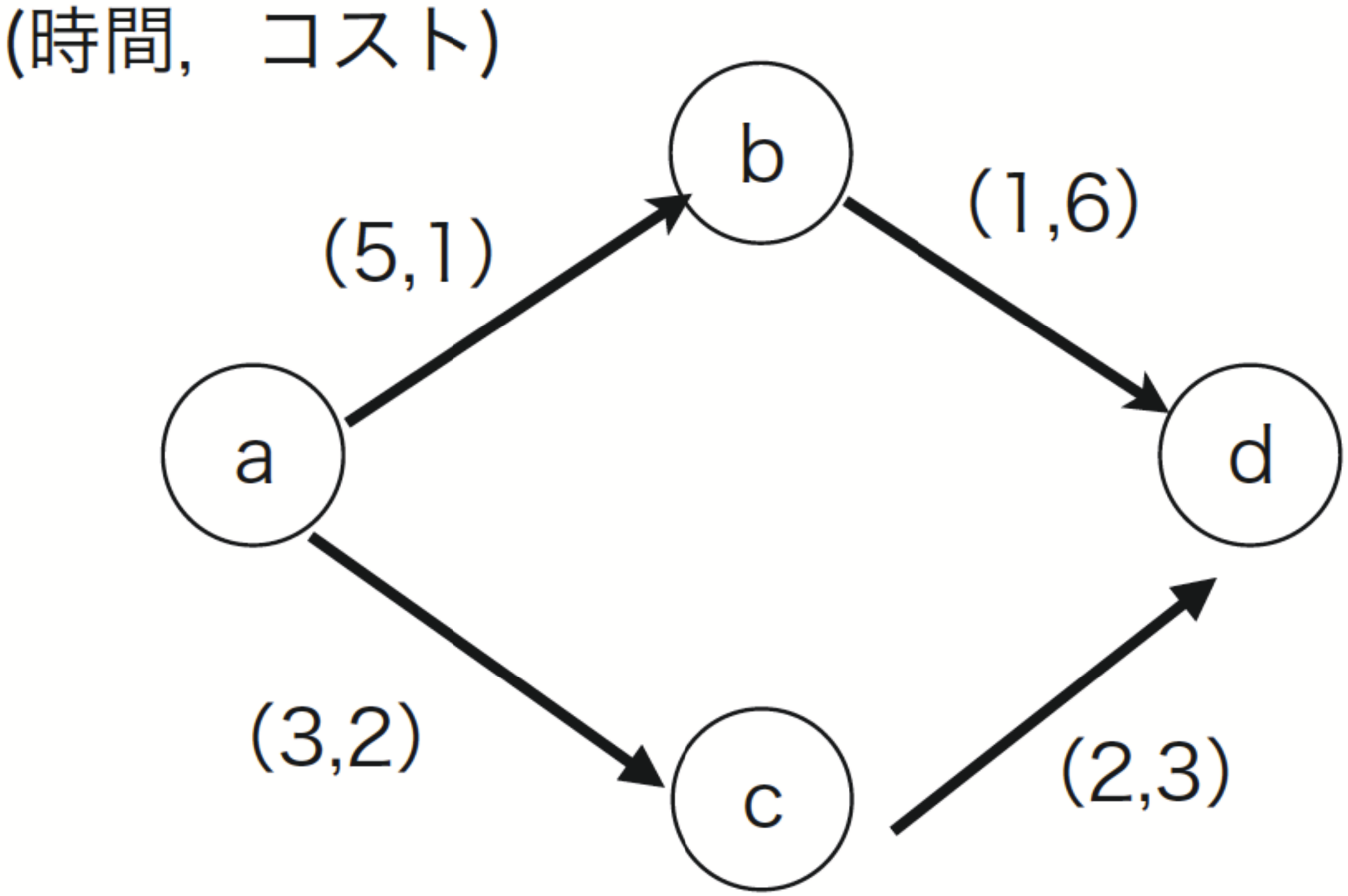
小林和博

海上技術安全研究所

1　概要

二港間の航海経路を計画する際には，燃料消費量と移動時間の双方を考慮する必要がある．移動時間が一定範囲で長くなる場合でも，定められた時間内での到着を実現するためのロバスト最短路モデルを紹介する．

2　航路をネットワークとして定式化する



航海海域上に，任意の場所にノードを定義する．ノードiからノードjに直接移動することを枝(i,j)で表現する．

3　枝上の燃料消費量と移動時間

3.1　単位時間あたりの燃料消費量は船速の3乗に比例する

ログ船速v_{ij}ノットで運航する船舶が単位時間あたりに消費する燃料の量は,

$$f(v) = \alpha v^3 + \beta v^2 + \gamma v$$

で与えられる.

Fagerholt et al.(10)**では,** $\alpha = 0.0036, \beta = -0.1015, \gamma = 0.8848$**という評価値を与えている.**

3.2 枝の場所による船速低下

枝(i,j)では，r_{ij} の船速低下を受けると仮定する.
したがって，ログ船速 v_{ij} の船舶の対地船速は，$v_{ij} - r_{ij}$
この仮定の元では，枝 (i, j) 上の移動時間 t_{ij} は，

$$t_{ij} = \frac{d_{ij}}{v_{ij} - r_{ij}}$$

したがって，枝 (i, j) 上の燃料消費量は

$$\frac{\alpha v_{ij}^3 + \beta v_{ij}^2 + \gamma v_{ij}}{v_{ij} - r_{ij}}$$

で与えられる.

3.3 総移動時間に上限を設定する

枝 (i,j) を通るときに 1，それ以外のとき 0 をとる変数 x_{ij} を導入する．すると，航路上の総移動時間は

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij}$$

で与えられる．通常，船舶の一航海には総移動時間には上限時間がある．これを T とすると，総移動時間の上限制約は

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leq T$$

となる．

4　ネットワーク上の最適化問題としての定式化

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:(s,j)\in A} x_{ij} = 1, \tag{2}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \ (i \in N \setminus \{s,t\}, i \neq j), \tag{3}$$

$$\sum_{i:(i,t)\in A} = 1 \tag{4}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leq T. \tag{5}$$

5　制限つき最短路問題を二目的問題として解く

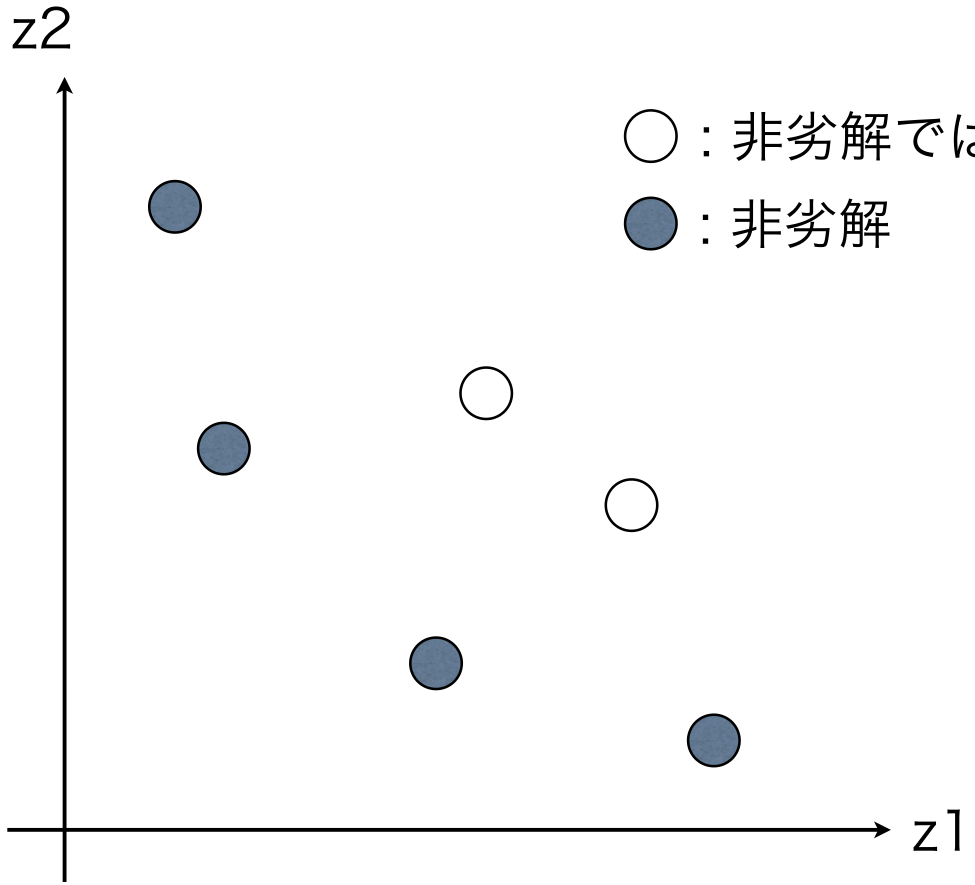
前述の問題は，整数計画問題として解いてもよいが，二目的最短路問題としても解ける.

$$\min(z_1(P), z_2(P))$$
$$\text{s.t.} \quad (2), (3), (4)$$

ただし,

$$z_1(P) := \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}, \quad z_2(P) := \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij}$$

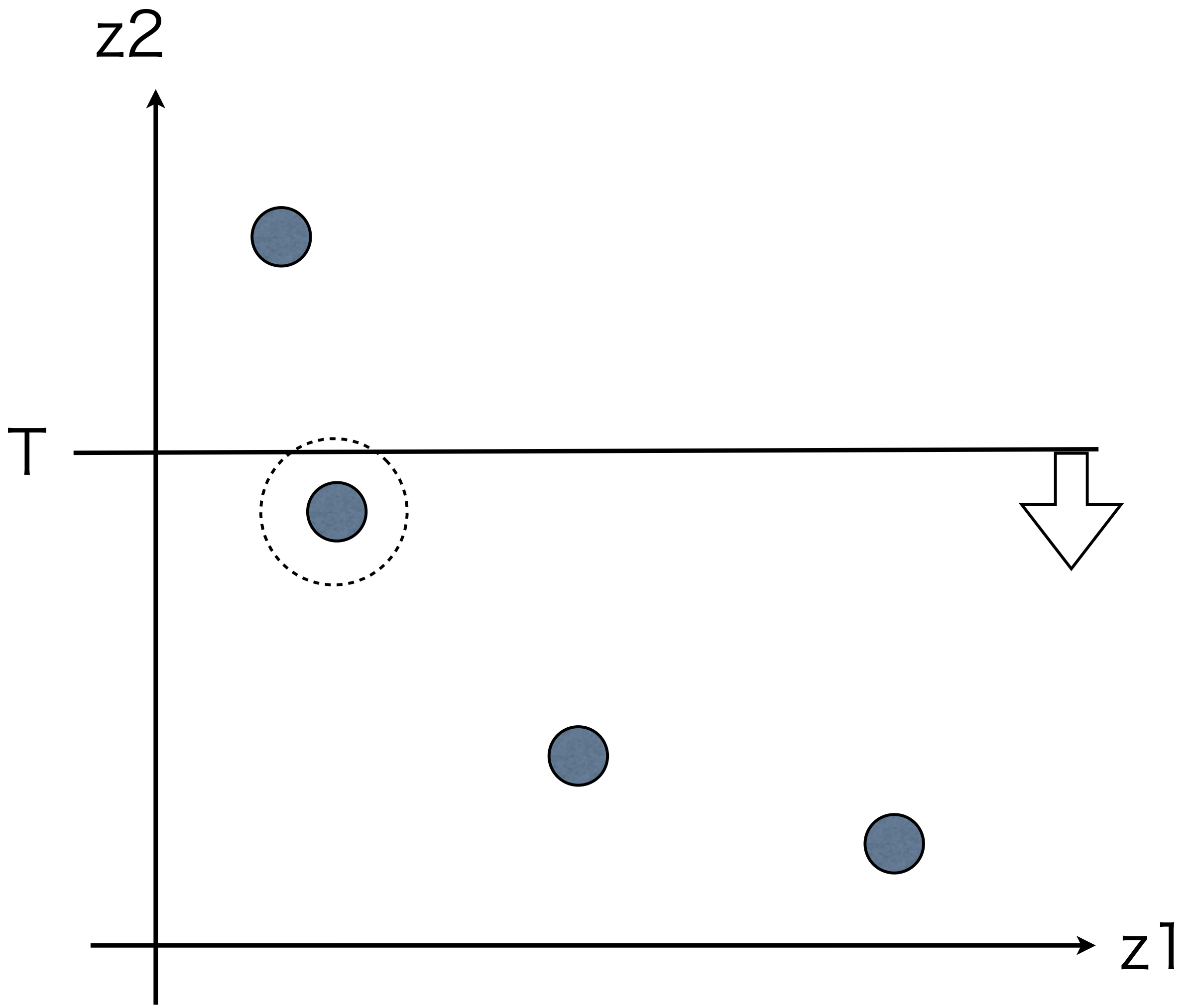
6　二目的最適化問題の非劣解



$z_1(P) > z_1(P')$ かつ $z_2(P) > z_2(P')$ となるパス P' が存在しないとき,
P は非劣解とよぶ.

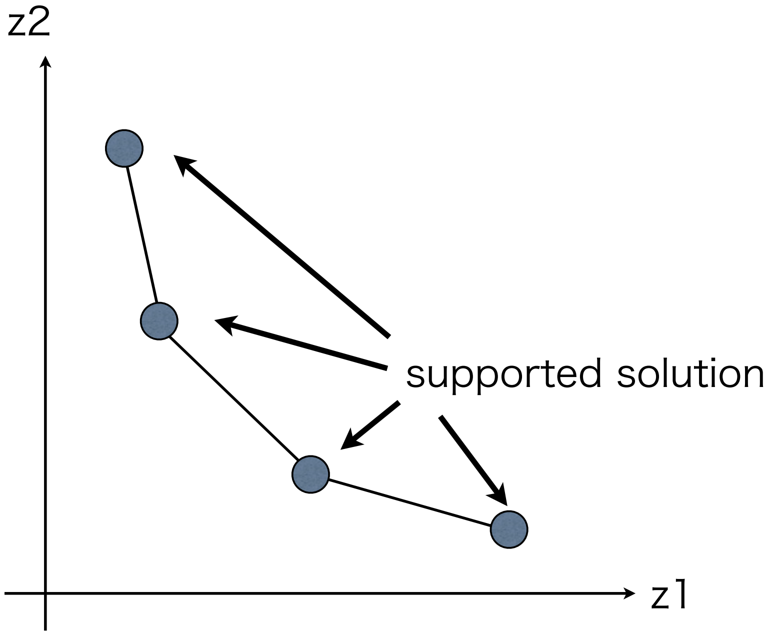
7　二目的最短路問題の非劣解と元の問題の解

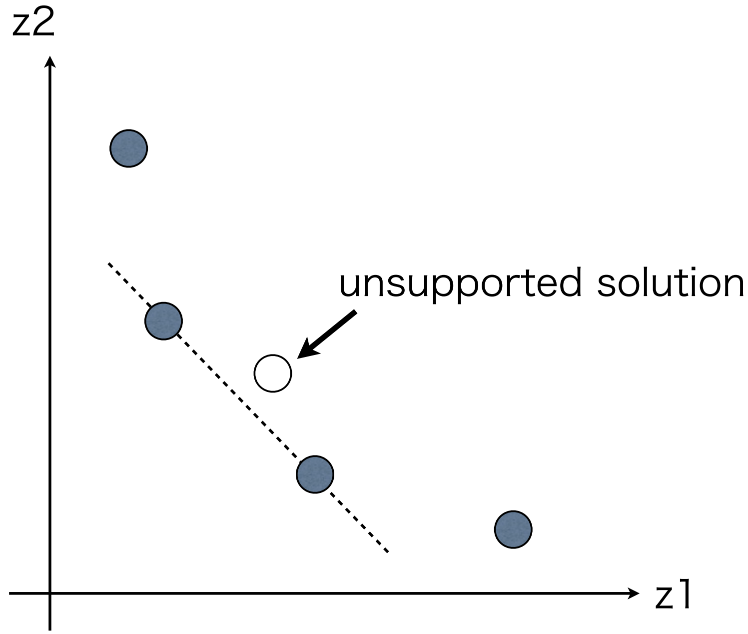
二目的最短路の非劣解を列挙できたら，その中から，z_2 が T 以下で z_1 が最小のものを取り出すと，それが元の制約つき最短路問題の解.



8　非劣解の種類

非劣解は，supported解とunsupported解から成る．





垂直法によってsupported解を列挙し，それらsupported解を使って GAPS法によってunsupported解を列挙する．

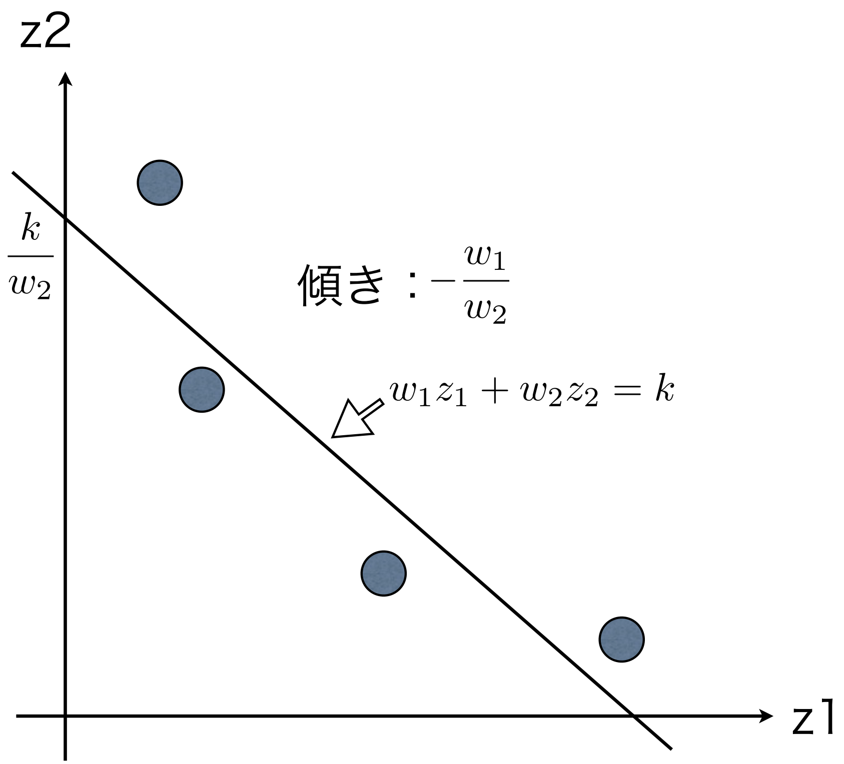
9　非劣解の列挙方法-基本的の考え方-

重みつき（1目的）最短路を解く．その解から非劣解を取り出す．

重みつき和:

$$w_1 z_1(P) + w_2 z_2(P)$$

重みをうまく変化させて，非劣解を列挙する．



10　非劣解の列挙方法

10.1　supported 解の列挙

垂直法-Chi and Walter(12)

二つの非劣解 $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2})$**，** $x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2})$ **をもってきて，**

$$w_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2},\ w_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \tag{6}$$

とする．ただし，

$$a_1 = x_{2,2} - x_{1,2},\ a_2 = x_{1,1} - x_{2,1}.$$

10.2　unsupported 解の列挙

GAPS **法**-Coutinho-Rodrigues et al.(99)**：略**

11　ロバスト最短路

Bertsimas and Sim(04),
1目的の最短路問題のロバスト版.

枝 (i,j) **のコスト** c_{ij} **は，偏差** $\hat{c}_{ij}$ **だけ大きくなる可能性がある.**

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \max_{\{S|S\subseteq A,|S|=\Gamma\}} \sum_{(i,j)\in S} \hat{c}_{ij}x_{ij}$$

どの枝のコストが大きくなるかは不明だが， $|A|$ **本の枝のうち，大きくなるのは高々** Γ **本.（それ以外の枝のコストは** c_{ij}**）**
このロバスト最短路問題の解は，元の問題を $|A|$ **回くらい解けば求まる** (Bertsimas and Sim(04))**．つまり，難しさは元の最短路問題と同じくらい.**

12　ロバスト２目的最短路

コストは c_{ij} から $\hat{c}_{ij}$ だけ，移動時間は t_{ij} から $\hat{t}_{ij}$ だけ大きくなる可能性があるとする．ただし，$|A|$ のうち高々 Γ 本だけ．

$$z'_1 = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \max_{\{S|S\subseteq A,|S|=\Gamma\}} \hat{c}_{ij}x_{ij}$$

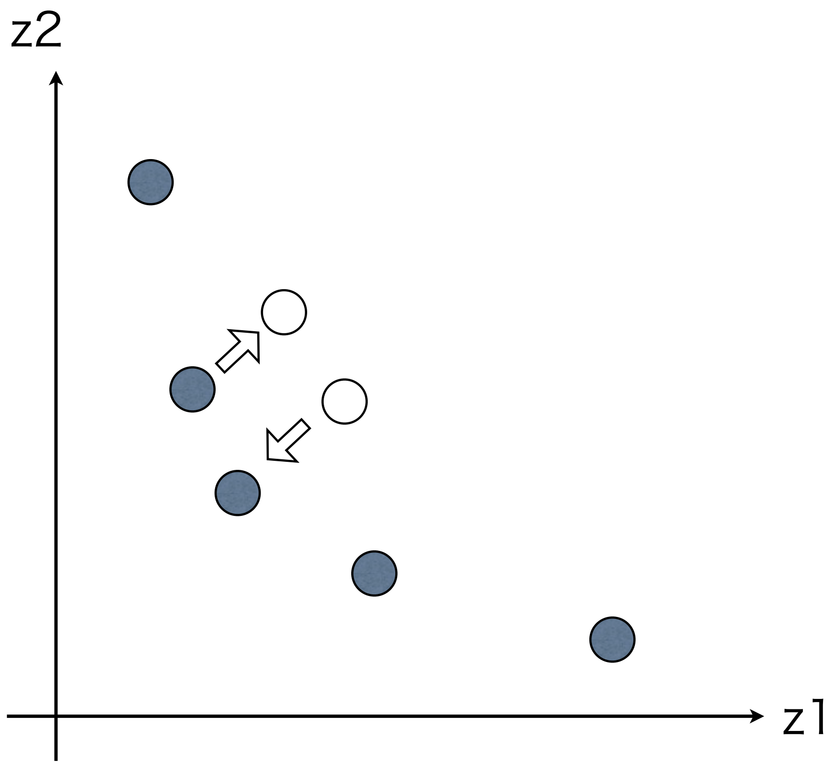
$$z'_2 = \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} + \max_{\{S|S\subseteq A,|S|=\Gamma\}} \hat{t}_{ij}x_{ij}$$

これらの重み付き（１目的）最短路問題を解いてロバストな非劣解を列挙する．

$$\begin{array}{ll} \min & w_1 z'_1 + w_2 z'_2 \\ \text{s.t.} & (2), (3), (4) \end{array} \tag{7}$$

13　2目的ロバスト最短路の非劣解

非劣解集合は，（ロバストでない）２目的最短路のものと異なる.



元の最短路問題では非劣解でないものが非劣解になったり，逆に，元の最短路問題での非劣解が非劣解でなくなったり.
直感的には，c_{ij} が小さく，$\hat{c}_{ij}$ が大きい枝 (i, j) は，元の問題の非劣解には入りやすいが，ロバスト最短路の非劣解には入りにくい気がする.

13.1　非劣解の列挙

【仮定】コストの偏差 $\hat{t}_{ij}$ と時間の偏差 $\hat{c}_{ij}$ とは独立ではなく，船速低下の値 r_{ij} によって定まるとする：(i,j) 上の船速低下 r_{ij} は，$\hat{r}_{ij}$ だけ大きくなる可能性があるとする.

$$\hat{t}_{ij} = d_{ij}\left(\frac{1}{v_{ij}-\hat{r}_{ij}} - \frac{1}{v_{ij}}\right)$$

$$\hat{c}_{ij} = f(v_{ij})d_{ij}\left(\frac{1}{v_{ij}-\hat{r}_{ij}} - \frac{1}{v_{ij}}\right)$$

ロバスト２目的最短路問題(7)の目的関数は，次のように書ける.

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}(w_1 c_{ij} + w_2 t_{ij})\,x_{ij} + \max_{\{S|S\subseteq A,|S|=\Gamma\}} \sum_{(i,j)\in S}\left(w_1\hat{c}_{ij} + w_2\hat{t}_{ij}\right)x_{ij}$$

つまり，コストを $w_1 c_{ij} + w_2 t_{ij}$，その偏差を $w_1\hat{c}_{ij} + w_2\hat{t}_{ij}$ とすると，ロバストでない２目的最短路の非劣解を求める方法をそのまま使うことができる.

14　今度の課題

数値実験による検証